モノイド圏、アプリカティブ、モナド

@mod_poppo

2018 年 12 月 7 日

概要

この文書ではモノイド圏を定義し、Haskell で使われるアプリカティブ関手との関係を提示することを目標とする。特に、「アプリカティブ関手をモノイド圏の言葉で書くとどうなるか」「モナドがアプリカティブ関手であることは、モノイド圏の言葉で書くとどうなるか・どう証明されるか」を示す。

目次

第 1 章

圏のモノイド構造と内部ホム

最終的にはこんな地図を描きたい（矢印は忘却関手の向き）：

$$\begin{tikzcd}
& \text{圏} & \\
\text{モノイド圏} \arrow[ur] & & \text{閉圏} \arrow[ul] \\
& \text{モノイド閉圏} \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
\text{対称モノイド圏} \arrow[uu] & & \text{対称閉圏} \arrow[uu] \\
& \text{対称モノイド閉圏} \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

1.1　モノイド圏

1.1.1　モノイド圏

定義 1.1.1 (モノイド圏). モノイド圏[*1] (monoidal category) $(\mathcal{C}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \varrho)$[*2] とは、

- 圏 $\mathcal{C}$
- 双関手 $\boxtimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$「モノイド演算」
- 単位対象 (unit object) と呼ばれる対象 $e \in \mathcal{C}$「単位元」
- *associator* と呼ばれる自然同型[*3]$\alpha = \alpha_{a,b,c}\colon (a \boxtimes b) \boxtimes c \xrightarrow{\sim} a \boxtimes (b \boxtimes c)$「結合法則」
- *left unitor* と呼ばれる自然同型 $\lambda = \lambda_a\colon e \boxtimes a \xrightarrow{\sim} a$「$e$ は左単位的」
- *right unitor* と呼ばれる自然同型 $\varrho = \varrho_a\colon a \boxtimes e \xrightarrow{\sim} a$「$e$ は右単位的」

の組であって、以下の公理を満たすもののことである：

MC1. 任意の対象 $a, b, c, d \in \mathcal{C}$ に対し、次の五角形図式が可換：

[*1] 文献によっては「モノイダル圏」と訳されることもある。しかし、“abelian group” は普通は「アーベリアン群」ではなく「アーベル群」と訳すし、“homological algebra” は「ホモロジカル代数」ではなく「ホモロジー代数」と訳す。よってこの文書では “monoidal category” は「モノイダル圏」ではなく「モノイド圏」と訳す。（1 文字短いし…）

[*2] $\boxtimes$ は文字化けではなく、バッテンを四角形で囲ったものである。

[*3] associator の向きは流儀によって異なるので注意。

$$\begin{tikzcd}
 & & ((a \boxtimes b) \boxtimes c) \boxtimes d \arrow[dll, "\alpha_{a,b,c} \boxtimes \mathrm{id}_d"'] \arrow[drr, "\alpha_{a \boxtimes b, c, d}"] & & \\
(a \boxtimes (b \boxtimes c)) \boxtimes d \arrow[dr, "\alpha_{a, b \boxtimes c, d}"'] & & & & (a \boxtimes b) \boxtimes (c \boxtimes d) \arrow[dl, "\alpha_{a,b,c \boxtimes d}"] \\
 & a \boxtimes ((b \boxtimes c) \boxtimes d) \arrow[rr, "\mathrm{id}_a \boxtimes \alpha_{b,c,d}"] & & a \boxtimes (b \boxtimes (c \boxtimes d)) &
\end{tikzcd}$$

MC2. 任意の対象 $a, c \in \mathcal{C}$ に対し、$(\mathrm{id}_a \boxtimes \lambda_c) \circ \alpha_{a,e,c} = \varrho_a \boxtimes \mathrm{id}_c$ である。あるいは、次の三角形図式が可換：

$$\begin{tikzcd}
(a \boxtimes e) \boxtimes c \arrow[rr, "\alpha_{a,e,c}"] \arrow[dr, "\varrho_a \boxtimes \mathrm{id}_c"'] & & a \boxtimes (e \boxtimes c) \arrow[dl, "\mathrm{id}_a \boxtimes \lambda_c"] \\
 & a \boxtimes c &
\end{tikzcd}$$

モノイド演算である双関手 $\boxtimes$ は「テンソル積」とも呼ばれ、$\otimes$ で書かれることも多いが、ここではそうはしない。

補題 1.1.2. モノイド圏 $(\mathcal{C}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \rho)$ において、次の関手は、それぞれ圏同値である：

$$e \boxtimes - \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad - \boxtimes e \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

特に、射 f, g に関して $f \boxtimes \mathrm{id}_e = g \boxtimes \mathrm{id}_e$ または $\mathrm{id}_e \boxtimes f = \mathrm{id}_e \boxtimes g$ が成り立てば、$f = g$ である。

Proof. 次の自然同型が存在することを示せばよい：

$$(e \boxtimes -) \bullet \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \quad \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \bullet (e \boxtimes -) \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$$

が、これは λ のことである。もう片方も、ϱ が自然同型を与える。 □

命題 1.1.3. モノイド圏 $(\mathcal{C}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \rho)$ において、次の等式が成り立つ：

$$\lambda_{b \boxtimes c} \circ \alpha_{e,b,c} = \lambda_b \boxtimes \mathrm{id}_c, \quad (\mathrm{id}_a \boxtimes \varrho_b) \circ \alpha_{a,b,e} = \varrho_{a \boxtimes b}$$

図式で書けば、次の三角形図式がそれぞれ可換である：

$$\begin{tikzcd}
(e \boxtimes b) \boxtimes c \arrow[rr, "\alpha_{e,b,c}"] \arrow[dr, "\lambda_b \boxtimes \mathrm{id}_c"'] & & e \boxtimes (b \boxtimes c) \arrow[dl, "\lambda_{b \boxtimes c}"] \\
 & b \boxtimes c &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(a \boxtimes b) \boxtimes e \arrow[rr, "\alpha_{a,b,e}"] \arrow[dr, "\varrho_{a \boxtimes b}"'] & & a \boxtimes (b \boxtimes e) \arrow[dl, "\mathrm{id}_a \boxtimes \varrho_b"] \\
 & a \boxtimes b &
\end{tikzcd}$$

Proof. λ についての図式（左）を示す。次の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
((e \boxtimes e) \boxtimes b) \boxtimes c \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, "\alpha \boxtimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "(\varrho \boxtimes \mathrm{id}) \boxtimes \mathrm{id}"] & & (e \boxtimes e) \boxtimes (b \boxtimes c) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\varrho \boxtimes \mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "\text{イ}"] & & e \boxtimes (e \boxtimes (b \boxtimes c)) \arrow[dl, "\mathrm{id} \boxtimes \lambda"'] \arrow[dl, phantom, bend right, "\text{ロ}"] \\
\arrow[r, phantom, "\text{ハ}"] & (e \boxtimes b) \boxtimes c \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\text{ニ}"] & & e \boxtimes (b \boxtimes c) \arrow[dr, phantom, "\text{ホ}"] & \\
(e \boxtimes (e \boxtimes b)) \boxtimes c \arrow[rrrr, "\alpha"] \arrow[ur, "(\mathrm{id} \boxtimes \lambda) \boxtimes \mathrm{id}"] & & & & e \boxtimes ((e \boxtimes b) \boxtimes c) \arrow[ul, "\mathrm{id} \boxtimes (\lambda \boxtimes \mathrm{id})"'] \arrow[uu, "\mathrm{id} \boxtimes \alpha"']
\end{tikzcd}
$$

外側の五角形は、五角形公理より可換である。四角形イとニは、α の自然性より可換である。三角形ロとハは、三角形公理より可換である。この図式のそれぞれの射が同型であることを考えると、三角形ホも可換である。

$e \boxtimes -$ が圏同値である（補題1.1.2）ことを踏まえれば、三角形ホの可換性は示したい等式と同値である。

ϱ についての主張も同様に示せる。 □

命題 1.1.4. モノイド圏 $(\mathcal{C}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \rho)$ において、

$$\lambda_e = \varrho_e \colon e \boxtimes e \to e$$

である。

Proof. 次の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
& & e \boxtimes e \arrow[dr, "\lambda_e"] & \\
(e \boxtimes e) \boxtimes e \arrow[r, "\alpha"] \arrow[urr, "\varrho_e \boxtimes \mathrm{id}_e"] \arrow[drr, "\lambda_e \boxtimes \mathrm{id}_e"'] & e \boxtimes (e \boxtimes e) \arrow[ur, "\mathrm{id}_e \boxtimes \lambda_e"'] \arrow[dr, "\lambda_{e \boxtimes e}"] \arrow[u, phantom, "\text{イ}"] \arrow[d, phantom, "\text{ロ}"] \arrow[rr, phantom, "\text{ハ}"] & & e \\
& & e \boxtimes e \arrow[ur, "\lambda_e"'] &
\end{tikzcd}
$$

三角形イは三角形公理より可換である。三角形ロは命題1.1.3より可換である。四角形ハは λ の自然性より可換である。よって、外側の四角形も可換、つまり

$$\lambda_e \circ (\varrho_e \boxtimes \mathrm{id}_e) = \lambda_e \circ (\lambda_e \boxtimes \mathrm{id}_e)$$

である。λ_e は同型なので

$$\varrho_e \boxtimes \mathrm{id}_e = \lambda_e \boxtimes \mathrm{id}_e$$

である。補題1.1.2より $- \boxtimes \mathrm{id}_e$ が外せて、$\varrho_e = \lambda_e$ がわかる。 □

MacLane によるモノイド圏の定義では命題1.1.4も公理に含まれていたが、命題1.1.4は他の公理から導出できることが Kelly によって示された。

例 1.1.5 (集合の圏とデカルト積)**.** 集合の圏 **Set** は、デカルト積（直積）$\times$ に関してモノイド圏をなす。単位対象は、終対象 $*$ である。

例 1.1.6 (アーベル群の圏とテンソル積)**.** アーベル群の圏 $\mathbf{Ab}$ は、テンソル積 $\otimes$ に関してモノイド圏をなす。単位対象は、整数環 $\mathbf{Z}$ である。

例 1.1.7 (点付き集合の圏とスマッシュ積)**.** 点付き集合（基点付き集合）の圏 $\mathbf{Set}_*$ に対して、次のようにスマッシュ積 $\wedge$ を定義する：

$$A \wedge B = (A \times B)/\sim$$
$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \text{ and } y = y') \text{ or } ((x = * \text{ or } y = *) \text{ and } (x' = * \text{ or } y' = *))$$

ただし、積 $A \wedge B$ の基点は、基点 $(*, *)$ を含む同値類 $[(*, *)]$ とする。$\mathbf{Set}_*$ は、スマッシュ積 $\wedge$ に関してモノイド圏をなす。単位対象は、基点 $*$ の他にただ 1 つの元 1 を含む 2 元集合 $\{*, 1\}$ である。

例 1.1.8. 圏 $\mathbf{2}$ は、2 つの対象 $0, 1$ と 1 つの非自明な射 $0 \to 1$ からなる圏である。この圏はデカルト積を持つ。

$$0 \times 0 = 0, \quad 0 \times 1 = 0, \quad 1 \times 0 = 0, \quad 1 \times 1 = 1.$$

圏 $\mathbf{2}$ はデカルト積に関してモノイド圏をなす。単位対象は 1 である。

定義 1.1.9 (ストリクトモノイド圏)**.** ストリクトモノイド圏 (strict monoidal category) とは、モノイド圏であってさらに次を満たすもののことを言う：

1. $a \boxtimes (b \boxtimes c) = (a \boxtimes b) \boxtimes c$ であって α は恒等射
2. $e \boxtimes a = a$ であって λ は恒等射
3. $a \boxtimes e = a$ であって ϱ は恒等射

この場合は、五角形図式および三角形図式の可換性は自明となる。

例 1.1.10 (自己関手の圏)**.** $\mathcal{D}$ を圏[*4]、$\mathrm{End}(\mathcal{D})$ を $\mathcal{D}$ 上の自己関手の圏とする。つまり、$\mathrm{End}(\mathcal{D})$ は

- 対象は、$\mathcal{D}$ の自己関手 $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$.
- 対象 F から対象 G への射は、関手 F から関手 G への自然変換のことである

からなる圏である。自己関手の圏 $\mathrm{End}(\mathcal{D})$ は、（自己）関手の合成 $\bullet$ によってストリクトモノイド圏となる。単位対象は、恒等関手 $\mathrm{Id}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ である。

ストリクトモノイド圏はこの文書中で今後登場することはほとんどないので忘れて良い。

1.1.2 モノイド関手とモノイド自然変換

圏というのは関手と自然変換を語るための言葉なので、モノイド圏を定義したからには当然モノイド関手および自然変換も定義しなければならない。

集合上のモノイドの場合は、モノイドの準同型が満たすべき法則は

$$f(e) = e, \quad f(ab) = f(a)f(b)$$

[*4] 関手圏のサイズの問題が気になる方は、$\mathcal{D}$ が適度に小さいか、あるいは「いくらでも大きい宇宙が存在する」ことを仮定していると思っていただきたい。

だったが、モノイド圏の関手に、対象の間の等式

$$F(e) = e, \quad F(a \boxtimes b) = F(a) \boxtimes F(b) \tag{1.1}$$

を要請するのでは条件が「強すぎる」。圏論をやっているのだから、対象の間の関係はイコールの代わりに射を使うべきだろう。そうすると、モノイド圏の関手が満たすべき法則は

$$F(e) \to e, \quad F(a \boxtimes b) \to F(a) \boxtimes F(b) \tag{1.2}$$

か

$$F(e) \leftarrow e, \quad F(a \boxtimes b) \leftarrow F(a) \boxtimes F(b) \tag{1.3}$$

となる。前者（式1.2）は *oplax* モノイド関手、後者（式1.3）は *lax* モノイド関手という。対象の間の射が同型の場合

$$F(e) \cong e, \quad F(a \boxtimes b) \cong F(a) \boxtimes F(b) \tag{1.4}$$

は *strong* モノイド関手、対象が等しい場合（式1.1）は *strict* モノイド関手という。

定義 1.1.11 (lax モノイド関手)**.** モノイド圏 $(\mathcal{C}, \boxtimes_{\mathcal{C}}, e_{\mathcal{C}}, \alpha_{\mathcal{C}}, \lambda_{\mathcal{C}}, \varrho_{\mathcal{C}})$ からモノイド圏 $(\mathcal{D}, \boxtimes_{\mathcal{D}}, e_{\mathcal{D}}, \alpha_{\mathcal{D}}, \lambda_{\mathcal{D}}, \varrho_{\mathcal{D}})$ への *lax* モノイド関手 (lax monoidal functor) (F, ε, m) とは、以下から成る組

- 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$
- 射 $\varepsilon\colon e_{\mathcal{D}} \to F(e_{\mathcal{C}})$
- 自然変換 $m = m_{a,b}\colon F(a) \boxtimes_{\mathcal{D}} F(b) \to F(a \boxtimes_{\mathcal{C}} b)$

であって、以下の公理を満たすもののことである：

1. $a, b, c \in \mathcal{C}$ に対して次が可換：

$$\begin{tikzcd}
(F(a) \boxtimes F(b)) \boxtimes F(c) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "m_{a,b} \boxtimes \mathrm{id}_{F(c)}"] & F(a) \boxtimes (F(b) \boxtimes F(c)) \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(a)} \boxtimes m_{b,c}"] \\
F(a \boxtimes b) \boxtimes F(c) \arrow[d, "m_{a \boxtimes b, c}"] & F(a) \boxtimes F(b \boxtimes c) \arrow[d, "m_{a, b \boxtimes c}"] \\
F((a \boxtimes b) \boxtimes c) \arrow[r, "F(\alpha)"] & F(a \boxtimes (b \boxtimes c))
\end{tikzcd}$$

2. $b \in \mathcal{C}$ に対して次がそれぞれ可換：

$$\begin{tikzcd}
e_{\mathcal{D}} \boxtimes F(b) \arrow[r, "\varepsilon \boxtimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\lambda_{\mathcal{D}}"] & F(e_{\mathcal{C}}) \boxtimes F(b) \arrow[d, "m_{e,b}"] \\
F(b) & F(e_{\mathcal{C}} \boxtimes b) \arrow[l, "F(\lambda_{\mathcal{C}})"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(b) \boxtimes e_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\mathrm{id} \boxtimes \varepsilon"] \arrow[d, "\varrho_{\mathcal{D}}"] & F(b) \boxtimes F(e_{\mathcal{C}}) \arrow[d, "m_{b,e}"] \\
F(b) & F(b \boxtimes e_{\mathcal{C}}) \arrow[l, "F(\varrho_{\mathcal{C}})"]
\end{tikzcd}$$

定義 1.1.12 (strong モノイド関手)**.** *strong* モノイド関手 (strong monoidal functor) とは、lax モノイド関手 (F, ε, m) であって、ε および m が同型であるもののことである。

定義 1.1.13 (strict モノイド関手)**.** *strict* モノイド関手 (strict monoidal functor) とは、lax モノイド関手 (F, ε, m) であって、ε および m が恒等射であるもののことである。

定義 1.1.14 (oplax モノイド関手)**.** *oplax* モノイド関手 (oplax monoidal functor) とは、うんたらかんたら TODO: 書く

TODO: $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ における lax モノイド関手

例 1.1.15 (恒等モノイド関手)**.** 恒等関手は strict モノイド関手とみなせる。

定義 1.1.16 (モノイド自然変換)**.** モノイド圏 $\mathcal{C}$ からモノイド圏 $\mathcal{D}$ への lax モノイド関手 $F = (F, \varepsilon, m)$, $G = (G, \varepsilon', m')$ の間のモノイド自然変換 (monoidal natural transformation) $f \colon F \to G$ とは、F から G への（普通の圏の意味での）自然変換 f であって、以下の公理を満たすものである：

1. 以下の図式が可換：

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon'"'] & F(e) \arrow[d, "f_e"] \\ & G(e) \end{tikzcd}$$

2. 以下の図式が可換：

$$\begin{tikzcd} F(a) \boxtimes F(b) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f \boxtimes f"] & F(a \boxtimes b) \arrow[d, "f"] \\ G(a) \boxtimes G(b) \arrow[r, "m'"] & G(a \boxtimes b) \end{tikzcd}$$

TODO: モノイド関手の合成

TODO: 2-category の言葉を使って定式化するのはオーバーキルか？同等の内容を 2-cat の言葉を使わずに述べる？

1.1.3 通常のモノイドとの関係

モノイドを圏とみなす方法はいくつか考えられる。

1. 対象が 1 個の圏としてみなす。モノイドの元を射とみなし、モノイド演算を射の合成とみなす。
2. 離散圏（射が恒等射しか存在しない圏）としてみなす。モノイドの元を対象とみなし、モノイド演算を双関手とみなす。

これらの方法で圏とみなしたモノイドをモノイド圏としてみなせるだろうか？その場合、モノイドの準同型はどう解釈できる？モノイド関手はどう解釈できる？

まず、モノイド $M = (M, e, \cdot)$ を対象が 1 個の圏 $\mathcal{M}$ としてみなすことを考えよう。モノイド演算 $\cdot$ をもとに、$\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ から $\mathcal{M}$ への対象と射の対応を作る。

$$\begin{array}{rccc} & \mathcal{M} \times \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \text{対象} & (*, *) & \longmapsto & * \\ \text{射} & (a, b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array} \tag{1.5}$$

この対応は（双）関手になるだろうか？残念ながら、一般には、否である。

命題 1.1.17. 対応1.5が関手になることと、もとのモノイド M が可換であることは、同値である。

Proof. 対応1.5の関手性を仮定する。任意に取ったモノイドの元 $a, b \in M$（これは $a, b \in \mathrm{End}_{\mathcal{M}}(*)$ とみなす）

について $ab = ba$ を示す。圏 $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ における可換図式

$$\begin{tikzcd}
(*,*) \arrow[r, "{(a,e)}"] \arrow[dr, "{(a,b)}"'] & (*,*) \arrow[d, "{(e,b)}"] \\
& (*,*)
\end{tikzcd}$$

を考える（e は M の単位元で、$\mathcal{M}$ の恒等射である）。これを構成する射のそれぞれを対応1.5で送ると、圏 $\mathcal{M}$ の図式

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "ab"'] & * \arrow[d, "b"] \\
& *
\end{tikzcd}$$

が得られる。対応1.5の関手性を仮定しているので、この図式も可換である。よって $ab = ba$ であり、M は可換である。

逆の証明は省略する。 □

一方、モノイド M を離散圏とみなしたものに対しては、モノイド演算から双関手 $\boxtimes$ が定まる（詳細は省略）。

1.2 閉圏

モノイド圏は、集合圏の直積やアーベル群の圏のテンソル積が満たす性質を公理化したものだった。それに対して閉圏は、内部ホムの満たす性質を公理化したものだと言える。

なお、CWM [1] など一部の文献では「モノイド積の右随伴として」内部ホムを定義しているが、ここでは「モノイド積を仮定しないで」内部ホムを定義する。ここでの「閉圏」にはモノイド構造は仮定せず、CWM で言うところの「閉圏」はここでは「（対称）モノイド閉圏」と呼ぶ。

なぜモノイド積とは独立に閉圏を定式化するのか、について、筆者の考えを述べておく。内部ホムを持つ圏は（内部ホムの左随伴である）モノイド積も持つことが多いが、場合によっては、モノイド積よりも内部ホムの方が「基本的」と考えられる。例えば、線形代数では「テンソル積」よりも先に「Hom 集合が線型空間となること」を学習したはずだ。あるいは、型付きラムダ計算を基礎とする関数型言語においては、タプル型よりも関数型の方が「基本的」だろう。特に、この文書の目標である Haskell のアプリカティブ関手を語る際は、モノイド圏の言葉（タプル型）ではなく閉圏の言葉（関数型）を使った方が、Haskell 内で実際に使われている定義とそのまま対応する。よって、この文書ではモノイド積とは独立に閉圏の言葉を用意する。

型付きラムダ計算を基礎とする ML や Haskell などの関数型言語において、多変数関数は、タプルを取る関数か、カリー化された関数として実現される。圏論風に言えば、タプルを取る関数というのは始域がモノイド積であるような射のことであり、カリー化された関数とは終域が内部ホムであるような射のことである。この考えでいくと、モノイド圏と閉圏のどちらも、圏の射として「多変数関数」を表現するための枠組みを用意していると考えることができる。そういうわけで、モノイド閉圏との間には類似性がある。

閉圏とモノイド圏の類似性を具体的に挙げるなら、閉圏の i はモノイド圏の ϱ と、閉圏の j はモノイド圏の λ と、閉圏の L はモノイド圏の α と対応していると考えられる。公理に関しても、どちらも三角形の公理や五角形の公理を持っている。実際、モノイド閉圏においては、モノイド圏を構成する自然変換から閉圏を構成する自然変換を誘導できたり、その逆ができたりする。

関数型言語では、$a \to (b \to c)$ という型は $\to$ を右結合として $a \to b \to c$ と書くことが多い。内部ホムに関しても、$[a, [b, c]]$ の右側の角カッコを省略して $[a, b, c]$ と書くことにする。一般に、$[a_1, a_2, \dots, a_n, b] :=$

$[a_1, [a_2, \dots, [a_n, b] \dots]]$ である。この記法を使うと、$[[[a,b],[a,c]],[[a,b],[a,d]]]$ の代わりに $[[[a,b],a,c],[a,b],a,d]$ となり、カッコが減らせる。

閉圏に関して、Eilenberg と Kelly による Closed Categories [3] は基本的な文献である。ただし、この文書で定義する閉圏は [3] とは若干定式化が異なる。

1.2.1 閉圏

定義 1.2.1 (閉圏)**.** 閉圏 (closed category) $(\mathcal{C}, [-,-], e, i, j, L)$ とは、

- 圏 $\mathcal{C}$
- 関手 $[-,-]\colon \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$「内部ホム」
- 単位対象 (unit object) と呼ばれる対象 $e \in \mathcal{C}$
- 自然同型 $i\colon \mathrm{Id} \xrightarrow{\sim} [e,-]$
- 対角自然変換 $j = j_a\colon e \to [a,a]$「内部ホムにおける恒等射」
  - a について以下の自然性が成り立つ。任意の $f\colon a \to a'$ に対して次が可換：

$$\begin{tikzcd} & e \arrow[dl, "j_a"'] \arrow[dr, "j_{a'}"] & \\ {[a,a]} \arrow[dr, "{[\mathrm{id},f]}"'] & & {[a',a']} \arrow[dl, "{[f,\mathrm{id}]}"] \\ & {[a,a']} & \end{tikzcd}$$

- 対角自然変換 $L = L^a_{b,c}\colon [b,c] \to [[a,b],[a,c]]$「内部ホムの関数合成」
  - ただし、b,c については通常の自然性が成り立ち、a については以下の自然性（対角自然性）が成り立つ。任意の $f\colon a \to a'$ および $b,c \in \mathcal{C}$ に対して次が可換：

$$\begin{tikzcd} & {[b,c]} \arrow[dl, "L^a_{b,c}"'] \arrow[dr, "L^{a'}_{b,c}"] & \\ {[[a,b],[a,c]]} \arrow[dr, "{[[f,\mathrm{id}],\mathrm{id}]}"'] & & {[[a',b],[a',c]]} \arrow[dl, "{[\mathrm{id},[f,\mathrm{id}]]}"] \\ & {[[a',b],[a,c]]} & \end{tikzcd}$$

の組であって、以下の公理を満たすもののことである：

CC1. 任意の対象 $a, b \in \mathcal{C}$ について以下の図式が可換：

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "j_b"] \arrow[dr, "j_{[a,b]}"'] & {[b,b]} \arrow[d, "L^a"] \\ & {[[a,b],[a,b]]} \end{tikzcd}$$

CC2. 以下の図式が可換：

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "L^a"] \arrow[dr, "i"'] & {[[a,a],[a,b]]} \arrow[d, "{[j_a,\mathrm{id}]}"] \\ & {[e,[a,b]]} \end{tikzcd}$$

CC3. 以下の図式が可換：

$$
\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[r, "L^e"] \arrow[dr, "{[\mathrm{id},i]}"'] & {[[e,a],[e,b]]} \arrow[d, "{[i,\mathrm{id}]}"] \\
& {[a,[e,b]]}
\end{tikzcd}
$$

CC4. 以下の図式が可換：

$$
\begin{tikzcd}
& {[c,d]} \arrow[dl, "L^a"'] \arrow[dr, "L^b"] & \\
{[[a,c],[a,d]]} \arrow[d, "L^{[a,b]}"] & & {[[b,c],[b,d]]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},L^a]}"'] \\
{[[[a,b],a,c],[a,b],a,d]} \arrow[rr, "{[L^a,\mathrm{id}]}"] & & {[[b,c],[a,b],a,d]}
\end{tikzcd}
$$

CC5. 次の写像 $\gamma_{a,b}$ が全単射：

$$
\begin{array}{rccc}
\gamma_{a,b}\colon & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(e,[a,b]) \\
& f & \longmapsto & [\mathrm{id}_a, f] \circ j_a
\end{array}
$$

命題 1.2.2. $\gamma = \gamma_{a,b}$ は自然同型である。

Proof. b に関しての自然性は明らか。a に関しての自然性を考えよう。$g\colon a \to a'$ として次の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & {[\mathrm{id}_{a'}, f] \circ j_{a'}} \arrow[dd, mapsto] \\
& \mathrm{Hom}(a',b) \arrow[r] \arrow[d, "{\mathrm{Hom}(g,\mathrm{id}_b)}"] & \mathrm{Hom}(e,[a',b]) \arrow[d, "{\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_e,[g,\mathrm{id}_b])}"] & \\
& \mathrm{Hom}(a,b) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(e,[a,b]) & {[g,\mathrm{id}] \circ [\mathrm{id},f] \circ j_{a'}} \\
f \circ g \arrow[rr, mapsto] & & {[\mathrm{id}_a, f \circ g] \circ j_a} &
\end{tikzcd}
$$

自然性が成り立つにはこの図式が可換、つまり任意の f に対して

$$
[\mathrm{id}_a, f \circ g] \circ j_a = [g, \mathrm{id}] \circ [\mathrm{id}, f] \circ j_{a'}
$$

が成り立たなければならない。この等式を $\mathcal{C}$ の図式で書けば、

$$
\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "j_{a'}"] \arrow[d, "j_a"] & {[a',a']} \arrow[r, "{[\mathrm{id},f]}"] \arrow[d, "{[g,\mathrm{id}]}"] & {[a',b]} \arrow[d, "{[g,\mathrm{id}]}"] \\
{[a,a]} \arrow[r, "{[\mathrm{id},g]}"] & {[a,a']} \arrow[r, "{[\mathrm{id},f]}"] & {[a,b]}
\end{tikzcd}
\tag{1.6}
$$

の外側が可換、となる。図式1.6の右側の四角形の可換性は自明で、左側の可換性は j の対角自然性より成り立つので、図式1.6は可換である。 □

系 1.2.3. 局所小[*5]な閉圏 $(\mathcal{C}, [-,-], e, i, j, L)$ に対し、次によって関手 $V = \mathrm{Hom}(e,-)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ が定まる。

[*5] ここでは V の行き先を $\mathbf{Set}$ と表記するために局所小 (locally small) を課した。

- 対象 a に対して、集合 $\mathrm{Hom}(e,a)$ を対応させる。
- 射 $f\colon a \to b$ に対して、写像

  $$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(e,a) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(e,b) \\ g & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

  を対応させる。

この関手に対して、自然同型 $\mathrm{Hom}(a,b) \cong V([a,b])$ が成り立つ。

命題 1.2.4. 閉圏 $(\mathcal{C},[-,-],e,i,j,L)$ において、

$$i_{[e,a]} = [\mathrm{id}_e, i_a]\colon [e,a] \to [e,[e,a]].$$

Proof. i の自然性より、以下は可換である：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "i_a"] \arrow[d, "i_a"] & {[e,a]} \arrow[d, "{[\mathrm{id}_e, i_a]}"] \\ {[e,a]} \arrow[r, "i_{[e,a]}"] & {[e,[e,a]]} \end{tikzcd}$$

i が同型であることを考えれば、$i_{[e,a]} = [\mathrm{id}, i_a]$ がわかる。 □

命題 1.2.5. 閉圏 $(\mathcal{C},[-,-],e,i,j,L)$ において、

$$i_e = j_e\colon e \to [e,e].$$

Proof. γ が全単射なので、$\gamma(i_e) = \gamma(j_e)$ すなわち

$$[\mathrm{id}_e, i_e] \circ j_e = [\mathrm{id}_e, j_e] \circ j_e$$

を示せばよい。それには、次の図式の可換性を示せばよい：

$$\begin{tikzcd} & e \arrow[dl, "j_e"'] \arrow[d, "j_{[e,e]}"] \arrow[dr, "j_e"] \arrow[dl, phantom, shift left=6, "イ"] & \\ {[e,e]} \arrow[r, "L^e"] \arrow[dr, "i_{[e,e]}"] \arrow[dr, bend right=40, "{[\mathrm{id}, i]}"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "ロ"] \arrow[dr, phantom, shift right=6, "ハ"] & {[[e,e],[e,e]]} \arrow[d, "{[j_e, \mathrm{id}]}"] \arrow[r, phantom, "ニ"] & {[e,e]} \arrow[dl, "{[\mathrm{id}, j_e]}"] \\ & {[e,[e,e]]} & \end{tikzcd}$$

三角形イ、ロは閉圏の公理より可換である。二角形ハは命題1.2.4より可換である。四角形ニは j の対角自然性より可換である。よって図式は可換である。 □

TODO: モノイド圏でない閉圏の例？

1.2.2　閉関手と閉自然変換

定義 1.2.6 (閉関手)**.** 閉圏 $(\mathcal{C}, [-,-], e, i, j, L)$ から閉圏 $(\mathcal{D}, [-,-], e, i, j, L)$ への閉関手 (closed functor) $(F, \varepsilon, \mathsf{ap})$ とは、以下から成る組

- 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$
- 射 $\varepsilon\colon e \to F(e)$
- 自然変換 $\mathsf{ap} = \mathsf{ap}_{a,b}\colon F([a,b]) \to [F(a), F(b)]$

であって、以下の公理を満たすもののことである：

CF1. 次が可換：

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "j"] & F(e) \arrow[d, "F(j)"] \\ {[F(a), F(a)]} & F([a,a]) \arrow[l, "\mathsf{ap}"] \end{tikzcd}$$

CF2. 次が可換：

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "F(i)"] \arrow[d, "i"] & F([e,a]) \arrow[d, "\mathsf{ap}"] \\ {[e, F(a)]} & {[F(e), F(a)]} \arrow[l, "{[\varepsilon, \mathrm{id}]}"] \end{tikzcd}$$

CF3. 次が可換：

$$\begin{tikzcd} F([b,c]) \arrow[r, "F(L^a)"] \arrow[d, "\mathsf{ap}"] & F([[a,b],[a,c]]) \arrow[d, "\mathsf{ap}"] \\ {[F(b), F(c)]} \arrow[d, "L^{F(a)}"] & {[F([a,b]), F([a,c])]} \arrow[d, "{[\mathrm{id}, \mathsf{ap}]}"] \\ {[[F(a), F(b)], [F(a), F(c)]]} \arrow[r, "{[\mathsf{ap}, \mathrm{id}]}"] & {[F([a,b]), [F(a), F(c)]]} \end{tikzcd}$$

例 1.2.7 (恒等閉関手)**.** 恒等関手 Id には $\varepsilon = \mathrm{id}$, $\mathsf{ap} = \mathrm{id}$ によって閉関手の構造が入る。

定義 1.2.8 (閉自然変換)**.** 閉圏 $\mathcal{C}$ から閉圏 $\mathcal{D}$ への閉関手 $F = (F, \varepsilon, \mathsf{ap})$, $G = (G, \varepsilon', \mathsf{ap}')$ の間の閉自然変換 (closed natural transformation) $f\colon F \to G$ とは、F から G への（普通の圏の意味での）自然変換 f であって、以下の公理を満たすもののことである：

1. 以下の図式が可換：

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon'"'] & F(e) \arrow[d, "f_e"] \\ & G(e) \end{tikzcd}$$

2. 以下の図式が可換：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & F([a,b]) \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "\mathsf{ap}"] & \\
G([a,b]) \arrow[d, "\mathsf{ap}'"'] & & {[F(a),F(b)]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},f]}"] \\
{[G(a),G(b)]} \arrow[rr, "{[f,\mathrm{id}]}"] & & {[F(a),G(b)]}
\end{tikzcd}
$$

1.3 モノイド閉圏

1.3.1 モノイド閉圏

定義 1.3.1 (モノイド閉圏)**.** モノイド閉圏 (monoidal closed category または closed monoidal category) とは、組 $(\mathcal{C}, \boxtimes, [-,-], e, \alpha, \lambda, \varrho, i, j, L, \varphi)$ であって、以下の条件を満たすものである：

1. $(\mathcal{C}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \varrho)$ がモノイド圏
2. $(\mathcal{C}, [-,-], e, i, j, L)$ が閉圏
3. φ は自然同型

$$\varphi = \varphi_{a,b,c} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a \boxtimes b, c) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, [b,c])$$

   である。つまり、各 b に対する随伴

$$- \boxtimes b \quad \dashv \quad [b,-]$$

   が成り立つ。
4. モノイド圏の構成要素 α, λ, ϱ と閉圏の構成要素 L, j, i が随伴を介して以下のように関係する：
   (a) $j = \varphi(\lambda)$, つまり $\lambda\colon e \boxtimes a \to a \quad \overset{\varphi}{\longmapsto} \quad j\colon e \to [a,a]$
   (b) $i = \varphi(\varrho)$, つまり $\varrho\colon a \boxtimes e \to a \quad \overset{\varphi}{\longmapsto} \quad i\colon a \to [e,a]$
   (c) 以下の図式が可換：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & ([b,c] \boxtimes [a,b]) \boxtimes a \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "L^a"] & \\
{[b,c]} \boxtimes ([a,b] \boxtimes a) \arrow[d, "\mathrm{id}\boxtimes\mathrm{eval}"'] & & ([[a,b],[a,c]] \boxtimes [a,b]) \boxtimes a \arrow[d, "\mathrm{eval}\boxtimes\mathrm{id}"] \\
{[b,c]} \boxtimes b \arrow[dr, "\mathrm{eval}"'] & & {[a,c]} \boxtimes a \arrow[dl, "\mathrm{eval}"] \\
 & c &
\end{tikzcd}
$$

   ただし、eval は $\mathrm{eval} := \varphi^{-1}(\mathrm{id})$ で定まる随伴の余単位射である（後述)。

命題 1.3.2. モノイド閉圏において、自然な同型射

$$p = p_{a,b,c} \colon [a \boxtimes b, c] \xrightarrow{\sim} [a, [b,c]]$$

が存在する。（この同型射は「内部ホムのカリー化」と解釈できる」

Proof. 次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathrm{Hom}(-,[a\boxtimes b,c]) \arrow[dr, "\sim", "\varphi^{-1}"'] & & \mathrm{Hom}((-\boxtimes a)\boxtimes b,c) \arrow[dr, "\sim", "\varphi"'] & & \mathrm{Hom}(-,[a,[b,c]]) \\
& \mathrm{Hom}(-\boxtimes(a\boxtimes b),c) \arrow[ur, "\sim", "\mathrm{Hom}(\alpha,c)"'] & & \mathrm{Hom}(-\boxtimes a,[b,c]) \arrow[ur, "\sim", "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

この図式で与えられる自然同型

$$\mathrm{Hom}(-,[a\boxtimes b,c]) \cong \mathrm{Hom}(-,[a,[b,c]])$$

より、自然な同型射 $[a\boxtimes b,c]\cong[a,[b,c]]$ が得られる。 □

定義 1.3.3 (単位射と評価写像)**.** 随伴 $-\boxtimes b\dashv[b,-]$ における単位射 (unit) を unit, 余単位射 (counit) を eval で表す。

$$\begin{aligned}
\mathrm{unit}_{a,b} &= \varphi(\mathrm{id})\colon a\to[b,a\boxtimes b],\\
\mathrm{eval}_{a,b} &= \varphi^{-1}(\mathrm{id}_{[a,b]})\colon [a,b]\boxtimes a\to b
\end{aligned}$$

この余単位射 eval を評価写像 (evaluation map) と呼ぶ。

命題 1.3.4 (単位射と余単位射の普遍性)**.** eval と unit を使うと、φ は

$$\begin{aligned}
\varphi\colon\ \mathrm{Hom}(a\boxtimes b,c) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(a,[b,c])\\
f &\longmapsto [\mathrm{id},f]\circ\mathrm{unit}\\
\varphi^{-1}\colon\ \mathrm{Hom}(a,[b,c]) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(a\boxtimes b,c)\\
g &\longmapsto \mathrm{eval}\circ(g\boxtimes\mathrm{id})
\end{aligned}$$

と書ける。特に、$\mathrm{eval}\circ(\mathrm{unit}\boxtimes\mathrm{id})=\mathrm{id}$, $[\mathrm{id},\mathrm{eval}]\circ\mathrm{unit}=\mathrm{id}$ である。

命題 1.3.5 (単位射と評価写像の自然性)**.** 単位射 $\mathrm{unit}_{a,b}\colon a\to[b,a\boxtimes b]$ は a について自然、b について対角自然である。つまり、任意の $f\colon a\to a'$ および任意の $g\colon b\to b'$ について

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\mathrm{unit}"] \arrow[d, "f"'] & {[b,a\boxtimes b]} \arrow[d, "{[\mathrm{id}_b,f\boxtimes\mathrm{id}_b]}"] \\
a' \arrow[r, "\mathrm{unit}"] & {[b,a'\boxtimes b]}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\mathrm{unit}"] \arrow[d, "\mathrm{unit}"'] & {[b,a\boxtimes b]} \arrow[d, "{[\mathrm{id}_b,\mathrm{id}_a\boxtimes g]}"] \\
{[b',a\boxtimes b']} \arrow[r, "{[g,\mathrm{id}_{a\boxtimes b'}]}"] & {[b,a\boxtimes b']}
\end{tikzcd}$$

がそれぞれ可換となる。

評価写像 $\mathrm{eval}_{a,b}\colon[a,b]\boxtimes a\to b$ は a について対角自然、b について自然である。つまり、任意の $f\colon a\to a'$ および任意の $g\colon b\to b'$ について

$$\begin{tikzcd}
{[a',b]\boxtimes a} \arrow[r, "{[f,b]\boxtimes a}"] \arrow[d, "{[a',b]\boxtimes f}"'] & {[a,b]\boxtimes a} \arrow[d, "\mathrm{eval}_{a,b}"] \\
{[a',b]\boxtimes a'} \arrow[r, "\mathrm{eval}_{a',b}"] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[a,b]\boxtimes a} \arrow[r, "\mathrm{eval}_{a,b}"] \arrow[d, "{[a,g]\boxtimes a}"'] & b \arrow[d, "g"] \\
{[a,b']\boxtimes a} \arrow[r, "\mathrm{eval}_{a',b}"] & b'
\end{tikzcd}$$

がそれぞれ可換となる。

Proof. なんか一般論でいい感じにやりたいよね (TODO) □

1.3.2 モノイド圏と右随伴からのモノイド閉圏の構成

この文書ではモノイド圏と閉圏を独立に定義してそれらを組み合わせることによってモノイド閉圏を定義した。しかし、文献によっては、閉圏の言葉を用意せずに、モノイド圏に対して「$-\boxtimes b$ が右随伴を持つ」ことを課すことでモノイド閉圏を定義していることがある。そこで、モノイド圏に $-\boxtimes b$ の右随伴を加えればモノイド閉圏が得られることを示し、この文書での定義と他所での定義が一致することを確認する。

補題 1.3.6. 関手 $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に関して、自然同型

$$\psi = \psi_{x,a}\colon \mathrm{Hom}(x, Fa) \to \mathrm{Hom}(x, Ga)$$

が与えられたとする。この時、$p = p_a = \psi_{Fa,a}(\mathrm{id}_{Fa})\colon Fa \to Ga$ は自然同型である。

命題 1.3.7. モノイド圏 $(\mathcal{C}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \varrho)$ において、各 b に対して関手 $-\boxtimes b$ が右随伴 $[b, -]$ を持つとする。それを

$$\varphi = \varphi_{a,b,c}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a \boxtimes b, c) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, [b, c])$$

と書けば、次のように i, j, L を定めることによって $(\mathcal{C}, \boxtimes, [-,-], e, \alpha, \lambda, \varrho, i, j, L, \varphi)$ がモノイド閉圏となるようにできる：

$$\begin{aligned} i = i_a &:= \varphi(\varrho_a)\colon a \longrightarrow [e, a] \\ j = j_a &:= \varphi(\lambda_a)\colon e \longrightarrow [a, a] \\ L = L^a_{b,c} &:= \varphi(\varphi(\mathrm{eval}_{b,c} \circ (\mathrm{id} \boxtimes \mathrm{eval}_{a,b}) \circ \alpha))\colon [b, c] \to [[a, b], [a, c]] \end{aligned}$$

Proof. 右随伴 $[b, -]$ が b について関手となることを確認しておく。$f\colon b \to b'$ から誘導される射 $[f, c]\colon [b', c] \to [b, c]$ は次のように定まる：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(a \boxtimes b', c) \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(a \boxtimes f, c)"'] & \mathrm{Hom}(a, [b', c]) \arrow[d, dotted] \\ \mathrm{Hom}(a \boxtimes b, c) \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] & \mathrm{Hom}(a, [b, c]) \end{tikzcd}$$

これの関手性は、$-\boxtimes b$ の b についての関手性から誘導される。

自然同型 $i = i_a\colon a \xrightarrow{\sim} [e, a]$ は次の自然同型から構成できる：

$$\mathrm{Hom}(-, a) \xrightarrow[\mathrm{Hom}(\varrho, a)]{\sim} \mathrm{Hom}(- \boxtimes e, a) \xrightarrow[\varphi]{\sim} \mathrm{Hom}(-, [e, a])$$

対角自然変換 $j = j_a\colon e \longrightarrow [a, a]$ は $j_a = \varphi(\lambda_a)$ により与えられる。このように構成した j の対角自然性を示す。そのためには、任意に取った $f\colon a \to a'$ に対して $[\mathrm{id}_a, f] \circ j_a = [f, \mathrm{id}_{a'}] \circ j_{a'}$ を示したい。次の図式を

考える：

$$
\begin{tikzcd}
\lambda_a \arrow[rrrr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & & & & j_a = \varphi(\lambda_a) \arrow[dd, mapsto] \\
& \mathrm{Hom}(e\boxtimes a,a) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dd, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id},f)"] & \mathrm{Hom}(e,[a,a]) \arrow[dd, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id},[\mathrm{id},f])"'] & & \\
f\circ\lambda_a \arrow[rrr, mapsto] & & & \varphi(f\circ\lambda_a) & [\mathrm{id},f]\circ j_a \\
& \mathrm{Hom}(e\boxtimes a,a') \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{Hom}(e,[a,a']) & & \\
\lambda_{a'}\circ(\mathrm{id}\boxtimes f) \arrow[rrr, mapsto] & & & \varphi(\lambda_{a'}\circ(\mathrm{id}\boxtimes f)) & [f,\mathrm{id}]\circ j_{a'} \\
& \mathrm{Hom}(e\boxtimes a',a') \arrow[r, "\varphi"] \arrow[uu, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id}\boxtimes f,\mathrm{id})"] & \mathrm{Hom}(e,[a',a']) \arrow[uu, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id},[f,\mathrm{id}])"'] & & \\
\lambda_{a'} \arrow[rrrr, mapsto] \arrow[uu, mapsto] & & & & j_{a'} = \varphi(\lambda_{a'}) \arrow[uu, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

φ の自然性より、この図式は可換である。よって、$[\mathrm{id},f]\circ j_a = \varphi(f\circ\lambda_a)$, $\varphi(\lambda_{a'}\circ(\mathrm{id}\boxtimes f)) = [f,\mathrm{id}]\circ j_{a'}$ である。次に、λ の自然性より、$f\circ\lambda_a = \lambda_{a'}\circ(\mathrm{id}\boxtimes f)$ がわかる。よって、

$$[\mathrm{id},f]\circ j_a = \varphi(f\circ\lambda_a) = \varphi(\lambda_{a'}\circ(\mathrm{id}\boxtimes f)) = [f,\mathrm{id}]\circ j_{a'}$$

となり、j の対角自然性がわかる。

対角自然変換 $L = L^a_{b,c}\colon [b,c]\to[[a,b],[a,c]]$ は次のように構成できる。

$$L^a_{b,c} = \varphi(\varphi(\mathrm{eval}_{b,c}\circ(\mathrm{id}\boxtimes\mathrm{eval}_{a,b})\circ\alpha))$$

$$([b,c]\boxtimes[a,b])\boxtimes a \xrightarrow{\alpha} [b,c]\boxtimes([a,b]\boxtimes a) \xrightarrow{\mathrm{id}\boxtimes\mathrm{eval}_{a,b}} [b,c]\boxtimes b \xrightarrow{\mathrm{eval}_{b,c}} c$$

$L^a_{b,c}$ の a についての対角自然性と、b, c についての自然性を示す。まずは a についての対角自然性について。$f\colon a\to a'$ に対して $[[f,\mathrm{id}],\mathrm{id}]\circ L^a = [\mathrm{id},[f,\mathrm{id}]]\circ L^{a'}$ を示せばよい。（省略）

以下、閉圏の公理（CC1〜CC5）を示す。

CC1: $j_{[a,b]} = L^a\circ j_b$ を示す。φ は全単射なので

$$
\begin{array}{rrcll}
 & j_{[a,b]} &=& L^a\circ j_b & : e\longrightarrow [[a,b],[a,b]] \\
\Longleftrightarrow & \varphi^{-1}(j_{[a,b]}) &=& \varphi^{-1}(L^a\circ j_b) & : e\boxtimes[a,b]\longrightarrow [a,b] \\
\Longleftrightarrow & \varphi^{-1}(\varphi^{-1}(j_{[a,b]})) &=& \varphi^{-1}(\varphi^{-1}(L^a\circ j_b)) & : (e\boxtimes[a,b])\boxtimes a\longrightarrow b
\end{array}
$$

である。よって、$\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(j_{[a,b]})) = \varphi^{-1}(\varphi^{-1}(L^a\circ j_b))$ を示せばよい。左辺について、$j_{[a,b]} = \varphi(\lambda_{[a,b]})$ と定義したので、$\varphi^{-1}(j_{[a,b]}) = \lambda_{[a,b]}$ である。随伴の性質も使えば

$$\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(j_{[a,b]})) = \varphi^{-1}(\lambda_{[a,b]}) = \mathrm{eval}\circ(\lambda_{[a,b]}\boxtimes\mathrm{id}_a)$$

である。右辺については、随伴の性質より

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(L^a\circ j_b)) \\
&= \varphi^{-1}(\varphi^{-1}(L^a)\circ(j_b\boxtimes\mathrm{id}_{[a,b]})) \\
&= \varphi^{-1}(\varphi^{-1}(L^a))\circ((j_b\boxtimes\mathrm{id}_{[a,b]})\boxtimes\mathrm{id}_a)
\end{aligned}
$$

で、L^a の定義よりこれは

$$\mathrm{eval}_{b,c}\circ(\mathrm{id}\boxtimes\mathrm{eval}_{a,b})\circ\alpha\circ((j_b\boxtimes\mathrm{id}_{[a,b]})\boxtimes\mathrm{id}_a)$$

と等しい。よって、示すべき等式は

$$\mathrm{eval}\circ(\lambda_{[a,b]}\boxtimes\mathrm{id}_a)=\mathrm{eval}_{b,c}\circ(\mathrm{id}\boxtimes\mathrm{eval}_{a,b})\circ\alpha\circ((j_b\boxtimes\mathrm{id}_{[a,b]})\boxtimes\mathrm{id}_a)$$

である。この等式を示すためには次の図式の可換性を言えばよい：

$$\begin{tikzcd}
 & (e\boxtimes[a,b])\boxtimes a \arrow[dl, "\lambda\boxtimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[r, "(j\boxtimes\mathrm{id})\boxtimes\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, shift right=6ex, "イ"] \arrow[dr, phantom, "ロ"] & ([b,b]\boxtimes[a,b])\boxtimes a \arrow[d, "\alpha"] \\
{[a,b]}\boxtimes a \arrow[ddr, "\mathrm{eval}"'] \arrow[dr, phantom, "ハ"] & e\boxtimes([a,b]\boxtimes a) \arrow[l, "\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{id}\boxtimes\mathrm{eval}"] \arrow[r, "j\boxtimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "ニ"] & {[b,b]}\boxtimes([a,b]\boxtimes a) \arrow[d, "\mathrm{id}\boxtimes\mathrm{eval}"] \\
 & e\boxtimes b \arrow[d, "\lambda"] \arrow[r, "j\boxtimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "ホ"] & {[b,b]}\boxtimes b \arrow[dl, "\mathrm{eval}"] \\
 & b &
\end{tikzcd}$$

三角形イは命題1.1.3より可換である。四角形ロは α の自然性より、四角形ハは λ の自然性より可換である。四角形ニは $\boxtimes$ の関手性より可換である。三角形ホは $\lambda=\varphi^{-1}(j)=\mathrm{eval}\circ(j\boxtimes\mathrm{id})$ より可換である。

CC2: $i=[j_a,\mathrm{id}]\circ L^a$ を示す。φ は全単射なので

$$\begin{aligned}
& i=[j_a,\mathrm{id}]\circ L^a && :[a,b]\longrightarrow[e,[a,b]]\\
\iff\ & \varphi^{-1}(i)=\varphi^{-1}([j_a,\mathrm{id}]\circ L^a) && :[a,b]\boxtimes e\longrightarrow[a,b]\\
\iff\ & \varphi^{-1}(\varphi^{-1}(i))=\varphi^{-1}(\varphi^{-1}([j_a,\mathrm{id}]\circ L^a)) && :([a,b]\boxtimes e)\boxtimes a\longrightarrow b
\end{aligned}$$

である。よって、$\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(i))=\varphi^{-1}(\varphi^{-1}([j_a,\mathrm{id}]\circ L^a))$ を示せばよい。左辺について、$i=\varphi(\varrho)$ と定義したので、$\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(i))=\varphi^{-1}(\varrho)$ である。随伴の性質も使えば

$$\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(i))=\varphi^{-1}(\varrho)=\mathrm{eval}\circ(\varrho\boxtimes\mathrm{id})$$

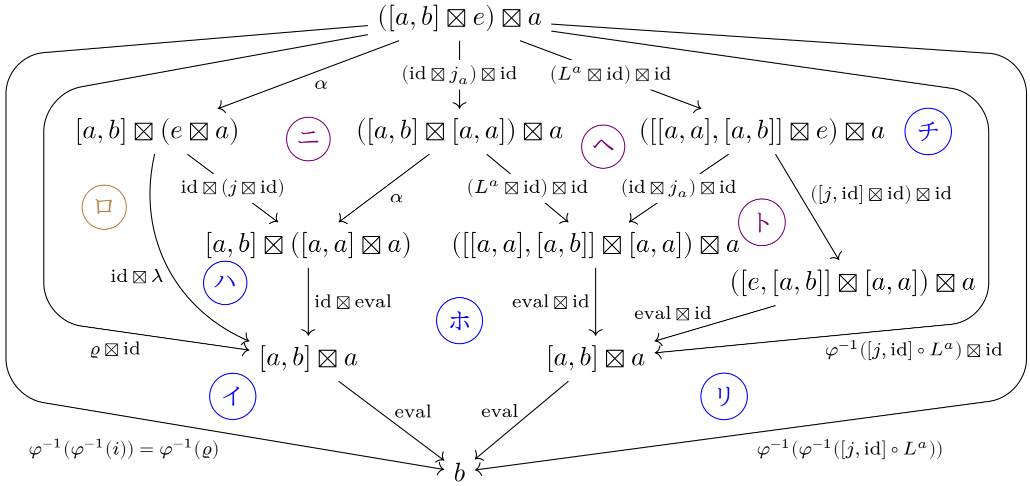
である。右辺については、随伴の性質より

$$\begin{aligned}
&\varphi^{-1}(\varphi^{-1}([j_a,\mathrm{id}]\circ L^a))\\
&=\varphi^{-1}(\mathrm{eval}\circ([j_a,\mathrm{id}]\boxtimes\mathrm{id})\circ(L^a\boxtimes\mathrm{id}))\\
&=\mathrm{eval}\circ(\mathrm{eval}\boxtimes\mathrm{id})\circ(([j_a,\mathrm{id}]\boxtimes\mathrm{id})\boxtimes\mathrm{id})\circ((L^a\boxtimes\mathrm{id})\boxtimes\mathrm{id})
\end{aligned}$$

である。よって、示すべき等式は

$$\mathrm{eval}\circ(\varrho\boxtimes\mathrm{id})=\mathrm{eval}\circ\varphi^{-1}(\mathrm{eval}\boxtimes\mathrm{id})\circ(([j_a,\mathrm{id}]\boxtimes\mathrm{id})\boxtimes\mathrm{id})\circ((L^a\boxtimes\mathrm{id})\boxtimes\mathrm{id})$$

である。この等式を示すためには次の図式の可換性を言えばよい：



三角形イ、ハ、チ、リは随伴の性質 $\varphi^{-1}(f) = \mathrm{eval} \circ (f \boxtimes \mathrm{id})$ より可換である。三角形ロは、モノイド圏の公理 MC2 より可換である。四角形ニは α の自然性より可換である。六角形ホは、L の定義と随伴の性質より可換

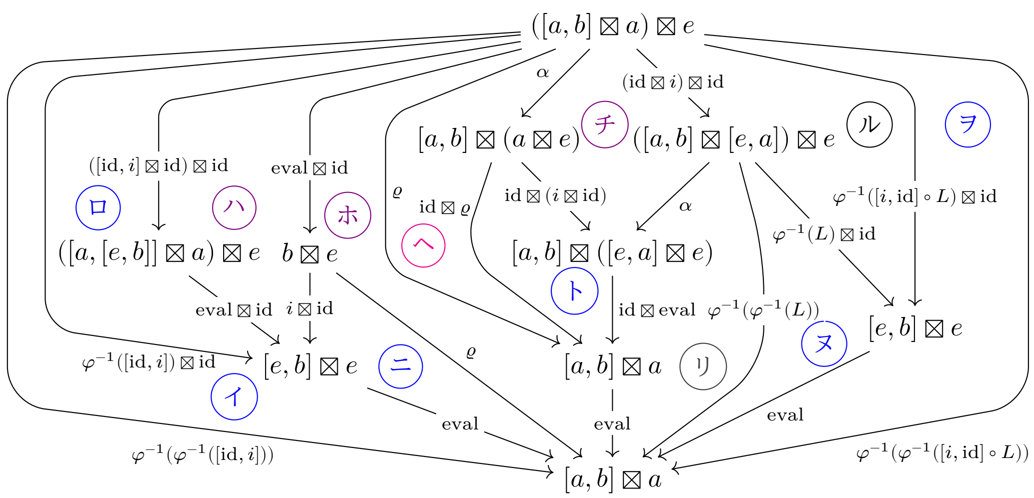
$$\mathrm{eval} \circ (\mathrm{id} \boxtimes \mathrm{eval}) \circ \alpha = \varphi^{-1}(\varphi^{-1}(L)) = \mathrm{eval} \circ (\varphi^{-1}(L) \boxtimes \mathrm{id}) = \mathrm{eval} \circ (\mathrm{eval} \boxtimes \mathrm{id}) \circ ((L \boxtimes \mathrm{id}) \boxtimes \mathrm{id})$$

である。四角形へは $\boxtimes$ の関手性より可換である。四角形トは eval の対角自然性より可換である。よって、この図式は可換である。

CC3: $[\mathrm{id}, i] = [i, \mathrm{id}] \circ L^a$ を示す。φ は全単射なので

$$\begin{aligned}
& [\mathrm{id}, i] = [i, \mathrm{id}] \circ L^a & : [a,b] \longrightarrow [a,[e,b]] \\
\iff \quad & \varphi^{-1}([\mathrm{id}, i]) = \varphi^{-1}([i, \mathrm{id}] \circ L^a) & : [a,b] \boxtimes a \longrightarrow [e,b] \\
\iff \quad & \varphi^{-1}(\varphi^{-1}([\mathrm{id}, i])) = \varphi^{-1}(\varphi^{-1}([i, \mathrm{id}] \circ L^a)) & : ([a,b] \boxtimes a) \boxtimes e \longrightarrow b
\end{aligned}$$

である。よって、$\varphi^{-1}(\varphi^{-1}([\mathrm{id}, i])) = \varphi^{-1}(\varphi^{-1}([i, \mathrm{id}] \circ L^a))$ を示せばよい。この等式を示すためには次の図式の可換性を言えばよい：



三角形イ、ロ、ニ、ト、ヌ、ヲは随伴の性質より可換である。四角形ハは eval の自然性より可換である。四角形ホは ϱ の自然性より可換である。三角形へは命題1.1.3より可換である。四角形チは α の自然性より可換である。四角形リは L の定義より可換である。あとは四角形ルの可換性を示せば良い（省略）。

CC4: 省略

CC5: 次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(a,b) \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}(\lambda,b)"', "\sim"] & & \mathrm{Hom}(e,[a,b]) \\
& \mathrm{Hom}(e \boxtimes a, b) \arrow[ur, "\sim", "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

随伴の性質より $[\mathrm{id}, f] \circ \varphi(\lambda) = \varphi(f \circ \lambda)$ が成り立つので、この図式は可換である。そして、λ, φ は同型射なので、その合成 γ も同型射である。 □

1.3.3 閉圏と左随伴からのモノイド閉圏の構成（未執筆）

TODO: 一筋縄にはいかないらしい？

1.3.4 モノイド閉関手

モノイド閉圏において、モノイド関手と閉関手はある意味同値な概念である。

定義 1.3.8 (モノイド閉関手)**.** モノイド閉関手とは、モノイド閉圏 $(\mathcal{C}, \boxtimes, [-,-], e, \alpha, \lambda, \varrho, i, j, L, \varphi)$ からモノイド圏 $(\mathcal{D}, \boxtimes, [-,-], e, \alpha, \lambda, \varrho, i, j, L, \varphi)$ へのモノイド閉関手 (monoidal closed functor) $(F, \varepsilon, m, \mathsf{ap})$ とは、以下から成る組

- 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$
- 射 $\varepsilon\colon e \to F(e)$
- 自然変換 $m = m_{a,b}\colon F(a) \boxtimes F(b) \to F(a \boxtimes b)$
- 自然変換 $\mathsf{ap} = \mathsf{ap}_{a,b}\colon F([a,b]) \to [F(a), F(b)]$

であって、以下の条件を満たすもののことである。

1. (F, ε, m) はモノイド圏 $\mathcal{C}$ からモノイド圏 $\mathcal{D}$ への lax モノイド関手である。
2. $(F, \varepsilon, \mathsf{ap})$ は閉圏 $\mathcal{C}$ から閉圏 $\mathcal{D}$ への閉関手である。
3. lax モノイド関手の構成要素 m と閉関手の構成要素 ap が以下のように関係する：
   (a) $\varphi^{-1}(\mathsf{ap}) = F(\mathrm{eval}) \circ m$（または同値な条件として $\varphi(m) = \mathsf{ap} \circ F(\mathrm{unit})$；補題1.3.9）

補題 1.3.9. 自然変換 $m = m_{a,b}\colon F(a) \boxtimes F(b) \to F(a \boxtimes b)$ と自然変換 $\mathsf{ap} = \mathsf{ap}_{a,b}\colon F([a,b]) \to [F(a), F(b)]$ に関して、以下の 2 条件は同値である：

1. $\varphi^{-1}(\mathsf{ap}) = F(\mathrm{eval}) \circ m$
2. $\varphi(m) = \mathsf{ap} \circ F(\mathrm{unit})$

Proof. 省略（筆者の計算ノートでは証明ができてるんだよ。ほんとだよ。） □

定義 1.3.10 (モノイド閉自然変換)**.** モノイド閉圏 $\mathcal{C}$ からモノイド閉圏 $\mathcal{D}$ へのモノイド閉関手 $F = (F, \varepsilon, m, \mathsf{ap})$, $G = (G, \varepsilon', m', \mathsf{ap}')$ の間のモノイド閉自然変換 (monoidal closed natural transformation) $f\colon F \to G$ とは、F から G への（普通の圏の意味での）自然変換 f であって、以下の条件を満たすものである：

1. F, G をそれぞれモノイド関手とみなした時に、f はモノイド自然変換である。
2. F, G をそれぞれ閉関手とみなした時に、f は閉自然変換である。

命題 1.3.11 (lax モノイド関手はモノイド閉関手である)**.** モノイド閉圏の間の lax モノイド関手 $(F, \varepsilon, m)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は $\mathsf{ap} = \varphi(F(\mathrm{eval}) \circ m)$ とおくことによってモノイド閉関手とみなせる。

Proof. TODO □

命題 1.3.12 (モノイド自然変換はモノイド閉自然変換である)**.** モノイド閉圏の間の lax モノイド関手の間のモノイド自然変換は、両端の関手を命題1.3.11によってモノイド閉関手とみなした時、自動的にモノイド閉自然変換となる。

Proof. TODO □

命題 1.3.13 (閉関手はモノイド閉関手である)**.** モノイド閉圏の間の閉関手 $(F, \varepsilon, \mathsf{ap})\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は $m = \varphi^{-1}(\mathsf{ap} \circ F(\mathrm{unit}))$ とおくことによってモノイド閉関手とみなせる。

Proof. TODO □

命題 1.3.14 (閉自然変換はモノイド閉自然変換である)**.** モノイド閉圏の間の閉関手の間の閉自然変換は、両端の関手を命題1.3.11によってモノイド閉関手とみなした時、自動的にモノイド閉自然変換となる。

Proof. TODO □

1.4 対称モノイド圏

TODO: braiding に言及しておく？

定義 1.4.1 (対称モノイド圏)**.** 対称モノイド圏 (symmetric monoidal category) $(\mathcal{C}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \varrho, B)$ は、モノイド圏 $(\mathcal{C}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \varrho)$ に次の自然同型を加えたもの

$$B_{a,b}\colon a \boxtimes b \to b \boxtimes a$$

で、次の公理を満たすもののことである：

1. すべての $a, b, c \in \mathcal{C}$ に対して、次の六角形図式が可換：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (a \boxtimes b) \boxtimes c \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dl, "B \boxtimes \mathrm{id}"'] & & a \boxtimes (b \boxtimes c) \arrow[dr, "B"] & \\
(b \boxtimes a) \boxtimes c \arrow[dr, "\alpha"'] & & & & (b \boxtimes c) \boxtimes a \arrow[dl, "\alpha"] \\
& b \boxtimes (a \boxtimes c) \arrow[rr, "\mathrm{id} \boxtimes B"] & & b \boxtimes (c \boxtimes a) &
\end{tikzcd}
$$

2. すべての $a, b \in \mathcal{C}$ に対して、
$$B_{b,a} B_{a,b} = \mathrm{id}_{a \boxtimes b}.$$

命題 1.4.2. 対称モノイド圏 $(\mathcal{C}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \varrho, B)$ において、

$$\varrho_a \circ B_{e,a} = \lambda_a$$

である。言い換えれば、次の三角形図式は可換である：

$$
\begin{tikzcd}
e \boxtimes a \arrow[rr, "B_{e,a}"] \arrow[dr, "\lambda_a"'] & & a \boxtimes e \arrow[dl, "\varrho_a"] \\
& a &
\end{tikzcd}
$$

ただし、a は任意の対象である。

Proof. 次の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (a \boxtimes e) \boxtimes e \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dl, "B \boxtimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\varrho \boxtimes \mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "イ"] & {} \arrow[d, phantom, "ロ"] & a \boxtimes (e \boxtimes e) \arrow[dl, "\mathrm{id} \boxtimes \lambda"'] \arrow[dr, "B"] \arrow[d, phantom, "ハ"] & \\
(e \boxtimes a) \boxtimes e \arrow[rr, "\lambda \boxtimes \mathrm{id}"'] \arrow[ddr, "\alpha"'] & {} \arrow[d, phantom, "ニ"] & a \boxtimes e \arrow[dr, "B"] & {} & (e \boxtimes e) \boxtimes a \arrow[dl, "\lambda \boxtimes \mathrm{id}"'] \arrow[ddl, "\alpha"] \\
& {} & {} \arrow[d, phantom, "ホ"] & e \boxtimes a \arrow[r, phantom, "ヘ"] & {} \\
& e \boxtimes (a \boxtimes e) \arrow[uur, "\lambda"] \arrow[rr, "\mathrm{id} \boxtimes B"'] & {} & e \boxtimes (e \boxtimes a) \arrow[u, "\lambda"'] &
\end{tikzcd}
$$

外側の六角形は、対称モノイド圏の六角形公理より可換である。三角形ロは、モノイド圏の公理より可換である。四角形ハは、B の自然性より可換である。四角形ホは、λ の自然性より可換である。三角形ニとへは、命題1.1.3より可換である。図式を構成する射が全て同型であることを考えれば、三角形イも可換である。

補題1.1.2より $- \boxtimes \mathrm{id}_e$ は外せて、示したい可換性が示せる。 $\square$

CWM [1] では命題1.4.2も公理に含めている。

TODO: 対称モノイド関手

1.5 対称閉圏

定義 1.5.1 (対称閉圏)**.** 対称閉圏 (symmetric closed category) $(\mathcal{C},[-,-],e,i,j,L,\mathsf{flip})$ は、閉圏 $(\mathcal{C},[-,-],e,i,j,L)$ に次の自然同型を加えたもの

$$\mathsf{flip}\colon [a,[b,c]] \to [b,[a,c]]$$

で、次の公理を満たすもののことである：

1. 次の図式が可換：

$$\begin{tikzcd}
& {[a,b,c,d]} \arrow[r, "{[\mathrm{id},\mathsf{flip}]}"] \arrow[dl, "\mathsf{flip}"'] & {[a,c,b,d]} \arrow[dr, "\mathsf{flip}"] & \\
{[b,a,c,d]} \arrow[dr, "{[\mathrm{id},\mathsf{flip}]}"'] & & & {[c,a,b,d]} \arrow[dl, "{[\mathrm{id},\mathsf{flip}]}"] \\
& {[b,c,a,d]} \arrow[r, "\mathsf{flip}"] & {[c,b,a,d]} &
\end{tikzcd}$$

2. 次の図式が可換：

$$\begin{tikzcd}
& {[b,c,d]} \arrow[dl, "L^a"'] \arrow[dr, "\mathsf{flip}"] & \\
{[[a,b],[a,c,d]]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\mathsf{flip}]}"'] & & {[c,b,d]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},L^a]}"] \\
{[[a,b],[c,a,d]]} \arrow[rr, "\mathsf{flip}"] & & {[c,[a,b],[a,d]]}
\end{tikzcd}$$

3. 次の図式が可換：

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[r, "L^a"] \arrow[d, "{[\mathrm{id},i]}"] & {[[a,a],[a,b]]} \arrow[d, "{[j,\mathrm{id}]}"] \\
{[a,[e,b]]} \arrow[r, "\mathsf{flip}"] & {[e,[a,b]]}
\end{tikzcd}$$

4. $\mathsf{flip} \circ \mathsf{flip} = \mathrm{id}$.

TODO: 対称閉関手

1.6 対称モノイド閉圏

1.6.1 対称モノイド閉圏

定義 1.6.1 (対称モノイド閉圏)**.** 対称モノイド閉圏 (symmetric monoidal closed category) $(\mathcal{C},\boxtimes,[-,-],e,\alpha,\lambda,\varrho,B,i,j,L,\mathsf{flip}$
は、

- モノイド閉圏 $(\mathcal{C},\boxtimes,[-,-],e,\alpha,\lambda,\varrho,i,j,L,\varphi)$

- 対称モノイド圏 $(\mathcal{C}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \varrho, B)$
- 対称閉圏 $(\mathcal{C}, [-,-], e, i, j, L, \mathsf{flip})$

からなり、次の図式を可換にするもののことである：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & {[a,b,c] \boxtimes (b \boxtimes a)} \arrow[dl, "\mathrm{id} \boxtimes B"'] \arrow[dr, "\mathsf{flip} \boxtimes \mathrm{id}"] & \\
{[a,b,c] \boxtimes (a \boxtimes b)} \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] & & {[b,a,c] \boxtimes (b \boxtimes a)} \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
{([a,b,c] \boxtimes a) \boxtimes b} \arrow[d, "\mathrm{eval} \boxtimes \mathrm{id}"'] & & {([b,a,c] \boxtimes b) \boxtimes a} \arrow[d, "\mathrm{eval} \boxtimes \mathrm{id}"] \\
{[b,c] \boxtimes b} \arrow[dr, "\mathrm{eval}"'] & & {[a,c] \boxtimes a} \arrow[dl, "\mathrm{eval}"] \\
 & c &
\end{tikzcd}
\tag{1.7}
$$

図式1.7は次と同値である：

$$\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(\mathsf{flip})) = \mathrm{eval} \circ (\mathrm{eval} \boxtimes \mathrm{id}) \circ \alpha^{-1} \circ (\mathrm{id} \boxtimes B) \circ \alpha$$

TODO: 対称モノイド閉関手

1.6.2 対称モノイド圏と右随伴からの対称モノイド閉圏の構成（未執筆）

モノイド圏と随伴 $-\boxtimes b \dashv [b,-]$ からモノイド閉圏を構成できたように、対称モノイド圏と随伴 $-\boxtimes b \dashv [b,-]$ から対称モノイド閉圏を構成できる（できてほしい)。

詳しいことは省略

TODO: 公理のチェックが終わってない

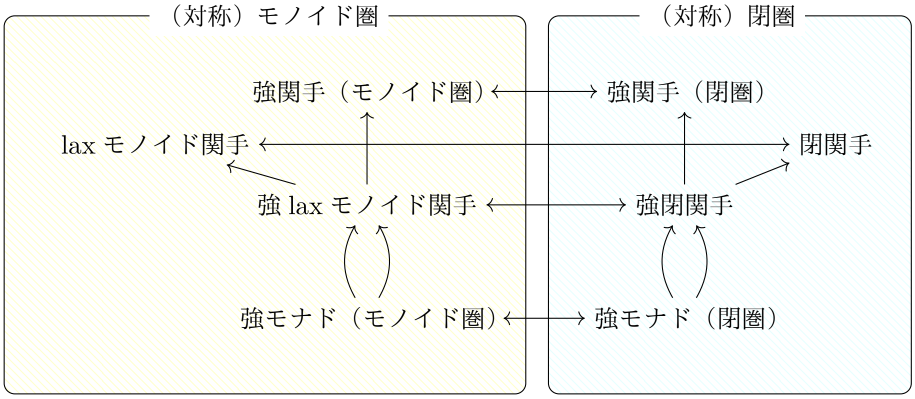
1.6.3 対称閉圏と左随伴からの対称モノイド閉圏の構成（未執筆）

TODO: 一筋縄にはいかないらしい？

第 2 章

自己関手の強度

最終的にはこんな地図を描きたい（矢印は忘却関手の向き）：



「モノイド圏」の住人である「強関手（モノイド圏）」「lax モノイド関手」「強 lax モノイド関手」「強モナド（モノイド圏）」と「閉圏」の住人である「強関手（閉圏）」「閉関手」「強閉関手」「強モナド（閉圏）」を結ぶ水平方向の矢印は、（対称）モノイド閉圏で考える。

強モナドへの強 lax モノイド関手としての構造の与え方は 2 通りあるが、いずれを経由しても強関手とみなした時はそれらは一致する（たぶん。TODO）。

2.1　閉圏における強関手

関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ はホム集合の間の対応 $\mathrm{Hom}(a,b) \to \mathrm{Hom}(F(a),F(b))$ を与える。この対応は「集合としての写像」であり、一般には圏 $\mathcal{C}$ や $\mathcal{D}$ の射ではない。

一般の圏なら話はそこで終わりなのだが、閉圏には内部ホムがある。内部ホムがある状況では、内部ホムの間の射 $[a,b] \to [F(a),F(b)]$ があっても良さそうだ。

実際、Haskell（射は関数で、内部ホムは関数型）の `Functor` クラスのインスタンスになるような関手に対しては、「Haskell 内部の」関数として

```
fmap :: (a -> b) -> (f a -> f b)
```

が定義される。

このように、射の対応が「内部化」されているような自己関手を強関手と呼び、内部化 $[a,b] \to [F(a), F(b)]$ を強度と呼ぶ。

定義 2.1.1 (閉圏における強関手)**.** 閉圏における強関手 (strong functor) とは、以下の組 (F, st)

- 自己関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$
- 強度 (strength) と呼ばれる自然変換 $\mathrm{st} = \mathrm{st}_{a,b}\colon [a,b] \to [F(a), F(b)]$「関手の内部化」

であって、次の性質を満たすものである：

1. 任意の対象 $a, b, c \in \mathcal{C}$ に対し、次の五角形図式が可換：

$$\begin{tikzcd}
 & {[b,c]} \arrow[dl, "\mathrm{st}"'] \arrow[dr, "L^a"] & \\
{[F(b),F(c)]} \arrow[d, "L^{F(a)}"'] & & {[[a,b],[a,c]]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\mathrm{st}]}"] \\
{[[F(a),F(b)],[F(a),F(c)]]} \arrow[rr, "{[\mathrm{st},\mathrm{id}]}"] & & {[[a,b],[F(a),F(c)]]}
\end{tikzcd}$$

2. 任意の対象 $a \in \mathcal{C}$ に対し、次の三角形図式が可換：

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j"'] & {[a,a]} \arrow[d, "\mathrm{st}"] \\
 & {[F(a),F(a)]}
\end{tikzcd}$$

Haskell の言葉で言えば、強関手の 2 つの公理は

```
fmap (f . g) = fmap f . fmap g
fmap id = id
```

に相当する（射 L が関数合成 `(.)` に対応し、射 j が恒等関数 `id` に対応する)。

例 2.1.2 (恒等強関手)**.** 恒等関手 Id は恒等射 $\mathrm{id}\colon [a,b] \to [a,b]$ を強度として強関手となる。

定義 2.1.3 (強関手の合成)**.** 閉圏 $\mathcal{C}$ の強関手 (F, st^F) と強関手 (G, st^G) の合成 (GF, st^{GF}) を次のように定める：

$$\begin{aligned}
\mathrm{st}^{GF} &:= \mathrm{st}^G \circ \mathrm{st}^F \\
&= \left([a,b] \xrightarrow{\mathrm{st}^F} [F(a), F(b)] \xrightarrow{\mathrm{st}^G} [GF(a), GF(b)]\right)
\end{aligned}$$

TODO: 強度の公理を満たすことを確かめる

定義 2.1.4 (強自然変換)**.** 強関手 (F, st^F) から強関手 (G, st^G) への強自然変換 $f\colon (F, \mathrm{st}^F) \to (G, \mathrm{st}^G)$ とは、

関手 F から関手 G への自然変換であって、次の意味で強度と整合的なもののことである：

$$
\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[r, "\mathrm{st}^F"] \arrow[d, "\mathrm{st}^G"] & {[F(a),F(b)]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},f]}"] \\
{[G(a),G(b)]} \arrow[r, "{[f,\mathrm{id}]}"] & {[F(a),G(b)]}
\end{tikzcd}
$$

が可換。

TODO: 水平合成、垂直合成？

2.2 モノイド圏における強関手

さっき述べた強関手の定義は、内部ホム $[-,-]$ を使って定義されていた。閉圏で自己関手の「強度」を定義できたということは、モノイド圏においても同様の「強度」が定義できると考えられる（それらはモノイド閉圏においては一致してほしい)。

少し考えれば、強度

$$\mathrm{st}_{a,b}\colon [a,b] \to [F(a),F(b)]$$

のモノイド圏における対応物は

$$t_{a,b}\colon a \boxtimes F(b) \to F(a \boxtimes b)$$

であることがわかる。この t はテンソル強度と呼ばれる。

定義 2.2.1 (強関手)**.** モノイド圏 $(\mathcal{C}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \varrho)$ における強関手 (strong functor) とは、以下の組 (F, t)

- 自己関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$
- テンソル強度 (tensorial strength) と呼ばれる自然変換 $t = t_{a,b}\colon a \boxtimes F(b) \to F(a \boxtimes b)$

であって、次の性質を満たすものである：

1. 任意の対象 $a, b, c \in \mathcal{C}$ に対し、次の五角形図式が可換：

$$
\begin{tikzcd}
& (a \boxtimes b) \boxtimes F(c) \arrow[dl, "\alpha_{a,b,F(c)}"'] \arrow[dr, "t_{a\boxtimes b,c}"] & \\
a \boxtimes (b \boxtimes F(c)) \arrow[d, "\mathrm{id}_a \boxtimes t_{b,c}"'] & & F((a \boxtimes b) \boxtimes c) \arrow[d, "F(\alpha_{a,b,c})"] \\
a \boxtimes F(b \boxtimes c) \arrow[rr, "t_{a,b\boxtimes c}"] & & F(a \boxtimes (b \boxtimes c))
\end{tikzcd}
$$

2. 任意の対象 $a \in \mathcal{C}$ に対し、$F(\lambda_a) \circ t_{e,a} = \lambda_{F(a)}$. あるいは、次の三角形図式が可換：

$$
\begin{tikzcd}
e \boxtimes F(a) \arrow[rr, "t_{e,a}"] \arrow[dr, "\lambda_{F(a)}"'] & & F(e \boxtimes a) \arrow[dl, "F(\lambda_a)"] \\
& F(a) &
\end{tikzcd}
$$

強関手の strong と、strong モノイド関手の strong は全く別の意味なので注意されたい（用語が悪い)。

例 2.2.2 (恒等強関手)**.** 恒等関手 Id は恒等射 $\mathrm{id}\colon a \boxtimes b \to a \boxtimes b$ を強度として強関手となる。

例 2.2.3. Haskell における `Functor` クラスで表される関手は、テンソル強度を持つ：

$$\begin{array}{rccc} t_{a,b}\colon & a \times F(b) & \longrightarrow & F(a \times b) \\ & (x, m) & \longmapsto & F(\lambda(y\colon b).\,(x,y))(m) \end{array}$$

ただし、$\lambda(y\colon b).\,(x,y)$ は射

$$\begin{array}{rcl} b & \to & a \times b \\ y & \mapsto & (x,y) \end{array}$$

のことである。コードで書けば次のようになる：

```
tensorialStrength :: (a, f b) -> f (a, b)
tensorialStrength (x, m) = fmap (\y -> (x, y)) m
```

定義 2.2.4 (強関手の合成)**.** モノイド圏 $\mathcal{C}$ の強関手 (F, t^F) と強関手 (G, t^G) の合成 (GF, t^{GF}) を次のように定める：

$$\begin{aligned} t^{GF} &:= G(t^F) \circ t^G \\ &= \left(a \boxtimes GF(b) \xrightarrow{t^G} G(a \boxtimes F(b)) \xrightarrow{G(t^F)} GF(a \boxtimes b) \right) \end{aligned}$$

TODO: テンソル強度の公理を満たすことを確かめる

定義 2.2.5 (強自然変換)**.** 強関手 (F, t^F) から強関手 (G, t^G) への強自然変換 $f\colon (F, t^F) \to (G, t^G)$ とは、関手 F から関手 G への自然変換であって、次の意味でテンソル強度と整合的なもののことである：

$$\begin{tikzcd} a \boxtimes F(b) \arrow[r, "t^F"] \arrow[d, "\mathrm{id} \boxtimes f"] & F(a \boxtimes b) \arrow[d, "f"] \\ a \boxtimes G(b) \arrow[r, "t^G"] & G(a \boxtimes b) \end{tikzcd}$$

が可換。

命題 2.2.6 (2 種類の強関手)**.** モノイド閉圏において、「モノイド圏の意味での強関手」と「閉圏の意味での強関手」は一致する。つまり、

1. モノイド圏の意味での強関手 (F, t) に適切な構造を与えて閉圏の意味での強関手 (F, st) を構成できる。具体的には、次のように st を定める：

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, dotted, "\mathrm{st}"] \arrow[d, "\mathrm{unit}"'] & {[F(a), F(b)]} \\ {[F(a), [a,b] \boxtimes F(a)]} \arrow[r, "{[\mathrm{id}, t]}"] & {[F(a), F([a,b] \boxtimes a)]} \arrow[u, "{[\mathrm{id}, F(\mathrm{eval})]}"'] \end{tikzcd}$$

2. 閉圏の意味での強関手 (F, st) に適切な構造を与えてモノイド圏の意味での強関手 (F, t) を構成できる。具体的には、次のように t を定める：

$$\begin{tikzcd} a \boxtimes F(b) \arrow[r, dotted, "t"] \arrow[d, "\mathrm{unit} \boxtimes \mathrm{id}"'] & F(a \boxtimes b) \\ {[b, a \boxtimes b] \boxtimes F(b)} \arrow[r, "{[\mathrm{id}, t]}"] & {[F(b), F(a \boxtimes b)] \boxtimes F(b)} \arrow[u, "\mathrm{eval}"'] \end{tikzcd}$$

3. 1. と 2. は互いに逆変換である。

Proof. 成り立ってほしい（TODO） □

モノイド閉圏においては 2 種類の強関手（モノイド圏のそれと閉圏のそれ）が定義できるが、それらは（適切な意味で）同一視できることがわかった。このことから「モノイド閉圏における強関手」が well-defined となる。

2.3 強 lax モノイド関手

強 lax モノイド関手とは、テンソル強度を持つ lax モノイド関手であって、テンソル強度と lax モノイド関手の構造が互いに整合的（コンパチブル）なもののことである。

定義 2.3.1 (強 lax モノイド関手)**.** モノイド圏 $(\mathcal{C}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \varrho)$ における強 *lax* モノイド関手 (strong lax monoidal functor) とは、以下の組 $(F, \varepsilon, m, \eta)$ である：

- lax モノイド関手 $(F, \varepsilon, m)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$
- モノイド自然変換 $\eta\colon \mathrm{Id} \to F$

なお、この場合のモノイド自然変換の公理は

1. $\eta_e = \varepsilon$
2. 以下の図式が可換：

$$\begin{tikzcd} a \boxtimes b \arrow[r, "\eta\boxtimes\eta"] \arrow[dr, "\eta"'] & F(a) \boxtimes F(b) \arrow[d, "m"] \\ & F(a \boxtimes b) \end{tikzcd}$$

となる。

命題 2.3.2 (強 lax モノイド関手は強関手である)**.** 強 lax モノイド関手 $(F, \varepsilon, m, \eta)$ には以下のテンソル強度が定まり、(F, t) は強関手となる。

$$t = t_{a,b} := m \circ (\eta \boxtimes \mathrm{id}) \quad \text{つまり} \quad \begin{tikzcd} a \boxtimes F(b) \arrow[r, "\eta\boxtimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "t"'] & F(a) \boxtimes F(b) \arrow[d, "m"] \\ & F(a \boxtimes b) \end{tikzcd}$$

さらに、このテンソル強度 t は以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} (a \boxtimes F(e)) \boxtimes F(b) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "t\boxtimes\mathrm{id}"] & a \boxtimes (F(e) \boxtimes F(b)) \arrow[d, "\mathrm{id}\boxtimes m"] \\ F(a \boxtimes e) \boxtimes F(b) \arrow[d, "m"] & a \boxtimes F(e \boxtimes b) \arrow[d, "t"] \\ F((a \boxtimes e) \boxtimes b) \arrow[r, "F(\alpha)"] & F(a \boxtimes (e \boxtimes b)) \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

TODO: 忘却関手として定式化する。

Proof. 示すべきことは、テンソル強度の公理 2 つ（五角形公理と三角形公理）と、図式2.1の可換性である。

五角形公理について。以下の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
 & & (a \boxtimes b) \boxtimes F(c) \arrow[dl, "(\mathrm{id} \boxtimes \eta) \boxtimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\eta \boxtimes \mathrm{id}"] \arrow[ddll, bend right, "\alpha_{a,b,F(c)}"'] \arrow[ddrr, bend left, "t_{a \boxtimes b, c}"] \arrow[dd, phantom, "ハ"] & & \\
 & (a \boxtimes F(b)) \boxtimes F(c) \arrow[dd, "\alpha"] \arrow[dr, "(\eta \boxtimes \mathrm{id}) \boxtimes \mathrm{id}"] \arrow[ddr, phantom, "ロ"] & & F(a \boxtimes b) \boxtimes F(c) \arrow[dr, "m"] \arrow[ur, phantom, "ニ"] & \\
a \boxtimes (b \boxtimes F(c)) \arrow[dr, "\mathrm{id} \boxtimes (\eta \boxtimes \mathrm{id})"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_a \boxtimes t_{b,c}"'] \arrow[ur, phantom, "イ"] \arrow[ddr, phantom, "ホ"] & & (F(a) \boxtimes F(b)) \boxtimes F(c) \arrow[ur, "m \boxtimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "ト"] & & F((a \boxtimes b) \boxtimes c) \arrow[ddl, "F(\alpha_{a,b,c})"] \\
 & a \boxtimes (F(b) \boxtimes F(c)) \arrow[r, "\eta \boxtimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \boxtimes m"] \arrow[dr, phantom, "ヘ"] & F(a) \boxtimes (F(b) \boxtimes F(c)) \arrow[d, "\mathrm{id} \boxtimes m"] & & \\
 & a \boxtimes F(b \boxtimes c) \arrow[r, "\eta \boxtimes \mathrm{id}"] \arrow[rr, bend right, "t_{a, b \boxtimes c}"'] & F(a) \boxtimes F(b \boxtimes c) \arrow[r, "m"] \arrow[d, phantom, "チ"] & F(a \boxtimes (b \boxtimes c)) &
\end{tikzcd}
$$

外側の五角形の可換性を示したい。四角形イとロは、α の自然性より可換である。四角形ハは、モノイド自然変換の公理 $(\eta = m \circ (\eta \boxtimes \eta))$ より可換である。三角形ニ、ホ、チは、t の定義より可換である。四角形ヘは、$\boxtimes$ の関手性より可換である。六角形トは、lax モノイド関手の公理より可換である。よって、外側の五角形も可換である。

三角形公理について。以下の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
e \boxtimes F(a) \arrow[r, "\eta_e \boxtimes \mathrm{id} = \varepsilon \boxtimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\lambda"'] \arrow[dr, "t"] \arrow[dr, phantom, "ロ"', shift right=4] & F(e) \boxtimes F(a) \arrow[d, "m"] \arrow[dl, phantom, "イ"', shift right=4] \\
F(a) & F(e \boxtimes a) \arrow[l, "F(\lambda)"]
\end{tikzcd}
$$

三角形ロの可換性を示したい。まず、η についてのモノイド自然変換の公理より $\eta_e = \varepsilon$ である。外側の四角形は、モノイド関手の公理より可換である。三角形イは、t の定義より可換である。よって、三角形ロも可換である。

図式2.1について。以下の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
(a \boxtimes F(e)) \boxtimes F(b) \arrow[r, "(\eta \boxtimes \mathrm{id}) \boxtimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "t \boxtimes \mathrm{id}"] \arrow[rr, phantom, bend left=15, "イ"] \arrow[dr, phantom, "ロ"] & (F(a) \boxtimes F(e)) \boxtimes F(b) \arrow[r, "m \boxtimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, "\alpha"] & F(a \boxtimes e) \boxtimes F(b) \arrow[d, "m"] \\
a \boxtimes (F(e) \boxtimes F(b)) \arrow[r, "\eta \boxtimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \boxtimes m"'] \arrow[dr, phantom, "ハ"] & F(a) \boxtimes (F(e) \boxtimes F(b)) \arrow[d, "\mathrm{id} \boxtimes m"] \arrow[r, phantom, "ニ"] & F((a \boxtimes e) \boxtimes b) \arrow[d, "F(\alpha)"] \\
a \boxtimes F(e \boxtimes b) \arrow[r, "\eta \boxtimes \mathrm{id}"] \arrow[rr, bend right, "t"'] \arrow[rr, phantom, bend right=15, "ホ"] & F(a) \boxtimes F(e \boxtimes b) \arrow[r, "m"] & F(a \boxtimes (e \boxtimes b))
\end{tikzcd}
$$

外側の六角形の可換性を示したい。三角形イ、ホは t の定義より可換である。四角形ロは α の自然性より可換である。四角形ハは $\boxtimes$ の関手性より可換である。六角形ニは lax モノイド関手の公理より可換である。よって、外側の六角形（図式2.1）も可換である。 □

命題 2.3.3 (lax モノイド関手が強 lax モノイド関手になる条件)**.** lax モノイド関手 (F, ε, m) がテンソル強度 t を持つ（つまり、(F, t) が強関手である）とする。この時、自然変換 $\eta\colon \mathrm{Id} \to F$ を次で定める：

$$\eta = \eta_a := F(\varrho_a) \circ t_a \circ (\mathrm{id}_a \boxtimes \varepsilon) \circ \varrho_a^{-1}$$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "\eta_a"] \arrow[d, "\varrho_a^{-1}"'] & & F(a) \\
a \boxtimes e \arrow[r, "\mathrm{id} \boxtimes \varepsilon"] & a \boxtimes F(e) \arrow[r, "t_a"] & F(a \boxtimes e) \arrow[u, "F(\varrho_a)"']
\end{tikzcd}
$$

この時、

1. 図式2.1が可換ならば、$(F, \varepsilon, m, \eta)$ は強 lax モノイド関手となる。つまり、$\eta_e = \varepsilon$ と $m \circ (\eta \boxtimes \eta) = \eta$

$$
\begin{tikzcd}
a \boxtimes b \arrow[r, "\eta \boxtimes \eta"] \arrow[dr, "\eta"'] & F(a) \boxtimes F(b) \arrow[d, "m"] \\
& F(a \boxtimes b)
\end{tikzcd}
$$

   が成り立つ。
2. さらにそれを命題2.3.2の方法で強関手 (F, t') とみなした時、二つのテンソル強度は一致する：$t = t'$. つまり、$t = m \circ (\eta \boxtimes \mathrm{id})$

$$
\begin{tikzcd}
a \boxtimes F(b) \arrow[r, "\eta \boxtimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "t"'] & F(a) \boxtimes F(b) \arrow[d, "m"] \\
& F(a \boxtimes b)
\end{tikzcd}
$$

   が成り立つ。

Proof. $\eta_e = \varepsilon$ について。次の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
e \boxtimes e \arrow[r, "\mathrm{id}\boxtimes\varepsilon"] \arrow[d, bend right, "\varrho_e"'] \arrow[d, bend left, "\lambda_e"] \arrow[d, phantom, "\text{イ}"] \arrow[dr, phantom, "\text{ロ}"] & e \boxtimes F(e) \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\lambda"'] \arrow[dr, phantom, "\text{ハ}"] & F(e \boxtimes e) \arrow[dl, "F(\lambda_e)"'] \arrow[dl, bend left, "F(\varrho_e)"] \arrow[dl, phantom, "\text{ニ}"] \\
e \arrow[r, "\varepsilon"'] & F(e) &
\end{tikzcd}
$$

二角形イ、ニは命題1.1.4より可換である。四角形ロは λ の自然性より可換である。三角形ハはテンソル強度の公理より可換である。よって、外側の五角形も可換で、$\varepsilon \circ \varrho = F(\varrho) \circ t \circ (\mathrm{id} \boxtimes \varepsilon)$ である。よって、$\eta_e = F(\varrho) \circ t \circ (\mathrm{id} \boxtimes \varepsilon) \circ \varrho^{-1} = \varepsilon$ である。

$t' = t$ すなわち $m \circ (\eta \boxtimes \mathrm{id}) = t$ について。次の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
 & (a \boxtimes e) \boxtimes F(b) \arrow[dl, "\varrho \boxtimes \mathrm{id}"'] \arrow[dd, "\alpha"] \arrow[dr, "(\mathrm{id} \boxtimes \varepsilon) \boxtimes \mathrm{id}"] & & & \\
a \boxtimes F(b) \arrow[rrrr, bend left=40, "\eta \boxtimes \mathrm{id}"] \arrow[ddddrr, bend right=40, "t"'] \arrow[r, phantom, "\text{ロ}"] & & (a \boxtimes F(e)) \boxtimes F(b) \arrow[dd, "\alpha"] \arrow[dr, "t \boxtimes \mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "\text{イ}"] & & \\
 & a \boxtimes (e \boxtimes F(b)) \arrow[ul, "\mathrm{id} \boxtimes \lambda"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \boxtimes (\varepsilon \boxtimes \mathrm{id})"] \arrow[ur, phantom, "\text{ハ}"] \arrow[d, phantom, "\text{ニ}"] & & F(a \boxtimes e) \boxtimes F(b) \arrow[dd, "m"] \arrow[dr, "F(\varrho) \boxtimes \mathrm{id}"] & \\
 & & a \boxtimes (F(e) \boxtimes F(b)) \arrow[dl, "\mathrm{id} \boxtimes m"'] \arrow[r, phantom, "\text{ホ}"] & & F(a) \boxtimes F(b) \arrow[ddll, bend left=40, "m"] \\
 & a \boxtimes F(e \boxtimes b) \arrow[uuul, "\mathrm{id} \boxtimes F(\lambda)"] \arrow[r, "t"'] \arrow[dr, phantom, "\text{ヘ}"] & F(a \boxtimes (e \boxtimes b)) \arrow[d, "F(\mathrm{id} \boxtimes \lambda)"'] \arrow[dr, phantom, "\text{ト}"] & F((a \boxtimes e) \boxtimes b) \arrow[l, "F(\alpha)"'] \arrow[dl, "F(\varrho \boxtimes \mathrm{id})"] \arrow[r, phantom, "\text{チ}"] & \\
 & & F(a \boxtimes b) & &
\end{tikzcd}
$$

示したいのは、一番外側の三角形の可換性である。五角形イは、η の定義より可換である。三角形ロと三角形トは、モノイド圏の公理より可換である。四角形ハは、α の自然性より可換である。四角形ニは、lax モノイド関手の公理より可換である。六角形ホは、図式2.1である。四角形ヘは、t の自然性より可換である。四角形チは、m の自然性より可換である。あとは、$\varrho \boxtimes \mathrm{id}$ が可逆であることを考えれば、外側の三角形の可換性がわかる。

$m \circ (\eta \boxtimes \eta) = \eta$ について。次の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
 & & a \boxtimes b \arrow[dl, "\mathrm{id} \boxtimes \varrho^{-1}"'] \arrow[dr, "\varrho^{-1}"] \arrow[ddddll, bend right=60, "\mathrm{id} \boxtimes \eta"'] \arrow[ddddd, bend left=90, "\eta"] \arrow[d, phantom, "\text{ハ}"] & & \\
 & a \boxtimes (b \boxtimes e) \arrow[d, "\mathrm{id} \boxtimes (\mathrm{id} \boxtimes \varepsilon)"'] & \text{ニ} & (a \boxtimes b) \boxtimes e \arrow[ll, "\alpha"'] \arrow[d, "\mathrm{id} \boxtimes \varepsilon"] \arrow[r, phantom, "\text{ロ}"] & \\
\text{イ} & a \boxtimes (b \boxtimes F(e)) \arrow[dl, "\mathrm{id} \boxtimes t"'] & \text{ホ} & (a \boxtimes b) \boxtimes F(e) \arrow[ll, "\alpha"'] \arrow[dr, "t"] & \\
a \boxtimes F(b \boxtimes e) \arrow[rr, "t"] \arrow[d, "\mathrm{id} \boxtimes F(\varrho)"] & & F(a \boxtimes (b \boxtimes e)) \arrow[dd, "F(\mathrm{id} \boxtimes \varrho)"'] & \text{ト} & F((a \boxtimes b) \boxtimes e) \arrow[ll, "F(\alpha)"'] \arrow[ddll, "F(\varrho)"] \\
a \boxtimes F(b) \arrow[d, "\eta \boxtimes \mathrm{id}"'] \arrow[drr, "t"] \arrow[r, phantom, "\text{ヘ}"] & & & & \\
F(a) \boxtimes F(b) \arrow[rr, "m"'] \arrow[r, phantom, "\text{チ}"] & & F(a \boxtimes b) & &
\end{tikzcd}
$$

外側の四角形の可換性を示したい。五角形イとロは、η の定義より可換である。三角形ハは、モノイド圏の公理より可換である。四角形ニは α の自然性より可換である。五角形ホは、テンソル強度の公理より可換である。四角形ヘは、t の自然性より可換である。三角形トは、モノイド圏の公理より可換である。三角形チの可換性はさっき示した。よって、外側の四角形は可換である。$(\eta\boxtimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\boxtimes\eta)=\eta\boxtimes\eta$ に注意すれば、$m\circ(\eta\boxtimes\eta)=\eta$ がわかる。 □

TODO: 強 lax モノイド関手の合成、強 lax モノイド関手の間の自然変換

2.4 強閉関手

強閉関手とは、強度を持つ閉関手であって、強度と閉関手の構造が互いに整合的（コンパチブル）なもののことである。

定義 2.4.1 (強閉関手)**.** 閉圏 $(\mathcal{C},[-,-],e,i,j,L)$ における強閉関手 (strong closed functor) とは、以下の組 $(F,\varepsilon,\mathsf{ap},\eta)$ である：

- 閉関手 $(F,\varepsilon,\mathsf{ap})\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}$
- 閉自然変換 $\eta\colon\ \mathrm{Id}\to F$

なお、この場合の閉自然変換の公理は

SCF1. $\eta_e=\varepsilon$

SCF2. 以下の図式が可換：

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "{[\mathrm{id},\eta]}"'] & F([a,b]) \arrow[d, "\mathsf{ap}"] \\
{[a,F(b)]} & {[F(a),F(b)]} \arrow[l, "{[\eta,\mathrm{id}]}"]
\end{tikzcd}$$

となる。

命題 2.4.2 (強閉関手は強関手である)**.** 強閉関手 $(F,\varepsilon,\mathsf{ap},\eta)$ に対して st を次のように定義することで、(F,st) は強関手となる。

$$\mathrm{st}:=\mathsf{ap}\circ\eta=\Big([a,b]\xrightarrow{\eta}F([a,b])\xrightarrow{\mathsf{ap}}[F(a),F(b)]\Big)$$

Proof. 成り立ってほしい（TODO: 証明） □

強閉関手を強関手とみなすことは、Haskell 風に言えば、`fmap` を `fmap f x = pure f <*> x` と定義することに相当する。

命題 2.4.3 (閉関手が強閉関手となる条件)**.** 閉関手 $(F,\varepsilon,\mathsf{ap})$ と強関手 (F,st) について、以下の条件が成り立つとする：（TODO: 図式）この時、$\eta:=i^{-1}\circ[\varepsilon,\mathrm{id}]\circ\mathrm{st}\circ i$ は閉自然変換 $\mathrm{Id}\to F$ を与える。さらに、強閉関手 $(F,\varepsilon,\mathsf{ap},\eta)$ から命題2.4.2の方法で誘導される $\mathrm{st}'=\mathsf{ap}\circ\eta$ は元の st と一致する。

Proof. 成り立ってほしい（TODO: 証明） □

TODO: 強閉関手の合成、強閉関手の間の自然変換

2.5　モノイド閉圏での強 lax モノイド関手と強閉関手

TODO: 書き直す

定理 2.5.1. モノイド閉圏において、強閉関手 $(F, \varepsilon, \mathsf{ap}, \eta)$ は

$$m := \mathsf{ap} \circ (F(\eta) \boxtimes \mathrm{id}) \colon F(a) \boxtimes F(b) \to F(a \boxtimes b)$$
$$F(a) \boxtimes F(b) \xrightarrow{F(\eta)\boxtimes\mathrm{id}} F([b, a \boxtimes b]) \boxtimes F(b) \xrightarrow{\mathsf{ap}} F(a \boxtimes b)$$

によって強 lax モノイド関手 $(F, \varepsilon, m, \eta)$ となる。

Proof. $(F, \varepsilon, m, \eta)$ が強 lax モノイド関手の公理を満たすことを確かめる（TODO）。 □

定理 2.5.2. モノイド閉圏において、強 lax モノイド関手 $(F, \varepsilon, m, \eta)$ は

$$\mathsf{ap}_{a,b} := F(\varepsilon) \circ m \colon F([a, b]) \boxtimes F(a) \to F(b)$$
$$F([a, b]) \boxtimes F(a) \xrightarrow{m} F([a, b] \boxtimes a) \xrightarrow{F(\varepsilon)} F(b)$$

によって強閉関手 $(F, \varepsilon, \mathsf{ap}, \eta)$ となる。

Proof. $(F, \varepsilon, \mathsf{ap}, \eta)$ が強閉関手の公理を満たすことを確かめる（TODO）。 □

定理 2.5.3. 定理2.5.1と定理2.5.2は互いに逆変換である。つまり、強閉関手 $(F, \varepsilon, \mathsf{ap}, \eta)$ を定理2.5.1によって強 lax モノイド関手とみなしたのを定理2.5.2により再びアプリカティブ関手 $(F, \varepsilon', \mathsf{ap}', \eta')$ とみなした時、$\varepsilon = \varepsilon'$, $\mathsf{ap} = \mathsf{ap}'$, $\eta = \eta'$ である。また、強 lax モノイド関手 $(F, \varepsilon, m, \eta)$ を定理2.5.2によって強閉関手とみなしたものを定理2.5.1により再び強 lax モノイド関手 $(F, \varepsilon', m', \eta')$ とみなした時、$\varepsilon = \varepsilon'$, $m = m'$, $\eta = \eta'$ である。

Proof. 前半（強閉関手 → 強 lax モノイド関手 → 強閉関手）について。

$$\begin{aligned} \mathsf{ap}_{a,b} &= F(\mathrm{eval}) \circ m_{[a,b],a} \\ &= F(\mathrm{eval}) \circ \mathsf{ap} \circ (F(\eta) \boxtimes \mathrm{id}) \end{aligned}$$

を確かめれば良い（TODO）。

後半（強 lax モノイド関手 → 強閉関手 → 強 lax モノイド関手）について。

$$\begin{aligned} m &= \mathsf{ap} \circ (F(\eta) \boxtimes \mathrm{id}) \\ &= F(\varepsilon) \circ m \circ (F(\eta) \boxtimes \mathrm{id}), \end{aligned}$$

を確かめれば良い。

$m = F(\varepsilon) \circ m \circ (F(\eta) \boxtimes \mathrm{id})$ について。次の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
F(a)\boxtimes F(b) \arrow[rr, "F(\eta)\boxtimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "m"] \arrow[from=1-1, to=2-3, phantom, "\text{イ}"] & & F([b,a\boxtimes b])\boxtimes F(b) \arrow[d, "m"] \\
F(a\boxtimes b) \arrow[rr, "F(\eta\boxtimes\mathrm{id})"] \arrow[dr, equal] & {} \arrow[d, phantom, "\text{ロ}"] & F([b,a\boxtimes b]\boxtimes b) \arrow[dl, "F(\mathrm{eval})"] \\
& F(a\boxtimes b) &
\end{tikzcd}
$$

四角形イは m の自然性から可換である。三角形ロは随伴の性質および F の関手性から可換である。よって、外側の五角形も可換である。 □

2.6　アプリカティブ関手

Haskell におけるアプリカティブ関手 (applicative functor) とは、次のクラスのインスタンス

```
class (Functor f) => Applicative f where
  pure :: a -> f a
  (<*>) :: f (a -> b) -> f a -> f b  -- or "ap"
```

であって、以下の公理を満たすもののことである：

1. identity
$$\mathsf{pure}\,\mathrm{id} \circledast u = u$$

2. composition
$$\mathsf{pure}\,(\circ) \circledast u \circledast v \circledast w = u \circledast (v \circledast w)$$

3. homomorphism
$$\mathsf{pure}\,f \circledast \mathsf{pure}\,x = \mathsf{pure}\,(fx)$$

4. interchange
$$u \circledast \mathsf{pure}\,x = \mathsf{pure}\,(\lambda f \to fx) \circledast u$$

さて、アプリカティブ関手を圏論の言葉で言うとどうなるかについてだが、結論を言ってしまえばアプリカティブ関手は強閉関手 (strong closed functor) に対応する。`pure` は自然変換 η に、演算 $\circledast$ は ap に対応する。すでに述べたように、モノイド閉圏においては強閉関手は強 lax モノイド関手と等価なので、「アプリカティブ関手は強 lax モノイド関手 (strong lax monoidal functor) である」と言っても良いが、強閉関手の方が構成要素の対応がわかりやすい。

公理の対応は、

1. identity: 閉関手の公理 CF1

$$
\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "j"] & F(e) \arrow[d, "F(j)"] \\
{[F(a),F(a)]} & F([a,a]) \arrow[l, "\mathsf{ap}"]
\end{tikzcd}
$$

2. composition: 閉関手の公理 CF3

$$\begin{tikzcd}
F([b,c]) \arrow[rr, "F(L^a)"] \arrow[d, "\mathsf{ap}"] & & F([[a,b],[a,c]]) \arrow[d, "\mathsf{ap}"] \\
{[F(b),F(c)]} \arrow[d, "L^{F(a)}"] & & {[F([a,b]),F([a,c])]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\mathsf{ap}]}"] \\
{[[F(a),F(b)],[F(a),F(c)]]} \arrow[rr, "{[\mathsf{ap},\mathrm{id}]}"] & & {[F([a,b]),[F(a),F(c)]]}
\end{tikzcd}$$

3. homomorphism: 強閉関手の公理 SCF2

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "{[\mathrm{id},\eta]}"'] & F([a,b]) \arrow[d, "\mathsf{ap}"] \\
{[a,F(b)]} & {[F(a),F(b)]} \arrow[l, "{[\eta,\mathrm{id}]}"]
\end{tikzcd}$$

4. interchange: TODO

となる。

2.7 強モナド

関手の合成を $\cdot$ で書くことにする。モナドの定義を確認しておこう。

定義 2.7.1 (モナド)**.** 圏 $\mathcal{C}$ におけるモナド (monad) (F,μ,η) とは、

- 自己関手 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}$
- 自然変換 $\mu\colon F\cdot F\to F$「積演算」
- 自然変換 $\eta\colon \mathrm{Id}\to F$「単位射」

の組であって、以下の図式を可換にするもののことである：

1.
$$\begin{tikzcd}
(F\cdot F)\cdot F \arrow[rr, equal] \arrow[d, "\mu\cdot\mathrm{id}_F"'] & & F\cdot(F\cdot F) \arrow[d, "\mathrm{id}_F\cdot\mu"] \\
F\cdot F \arrow[dr, "\mu"'] & & F\cdot F \arrow[dl, "\mu"] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

2.
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}\cdot F \arrow[r, "\eta\cdot\mathrm{id}_F"] \arrow[dr, equal] & F\cdot F \arrow[d, "\mu"] & F\cdot\mathrm{Id} \arrow[l, "\mathrm{id}_F\cdot\eta"'] \arrow[dl, equal] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

強モナドとは、モナドの自己関手が強関手であって、自然変換 μ と η がそれぞれ強自然変換であるようなもののことである。

定義 2.7.2 (閉圏における強モナド)**.** 閉圏 $\mathcal{C}$ における強モナド (strong monad) $(F, \mu, \eta, \mathrm{st})$ とは、以下を満たす組のことである：

1. (F, st) が強関手
2. (F, μ, η) がモナド
3. η が強自然変換、つまり以下が可換：

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[rr, "\mathrm{st}"] \arrow[dr, "{[\mathrm{id},\eta]}"'] & & {[Fa,Fb]} \arrow[dl, "{[\eta,\mathrm{id}]}"] \\
& {[a,Fb]} &
\end{tikzcd}$$

4. μ が強自然変換、つまり以下が可換：

$$\begin{tikzcd}
& {[a,b]} \arrow[dl, "\mathrm{st}"'] \arrow[dr, "\mathrm{st}"] & \\
{[F(a),F(b)]} \arrow[d, "\mathrm{st}"'] & & {[F(a),F(b)]} \arrow[d, "{[\mu,\mathrm{id}]}"] \\
{[F^2(a),F^2(b)]} \arrow[rr, "{[\mathrm{id},\mu]}"] & & {[F^2(a),F(b)]}
\end{tikzcd}$$

定義 2.7.3 (モノイド圏における強モナド)**.** モノイド圏 $\mathcal{C}$ における強モナド (strong monad) (F, μ, η, t) とは、以下を満たす組のことである：

1. (F, t) が強関手
2. (F, μ, η) がモナド
3. η が強自然変換、つまり以下が可換：

$$\begin{tikzcd}
a \boxtimes b \arrow[rr, "\mathrm{id}\boxtimes\eta"] \arrow[dr, "\eta"'] & & a \boxtimes F(b) \arrow[dl, "t"] \\
& F(a \boxtimes b) &
\end{tikzcd}$$

4. μ が強自然変換、つまり以下が可換：

$$\begin{tikzcd}
& a \boxtimes F^2(b) \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\boxtimes\mu"] & \\
F(a \boxtimes F(b)) \arrow[d, "F(t)"'] & & a \boxtimes F(b) \arrow[d, "t"] \\
F^2(a \boxtimes b) \arrow[rr, "\mu"] & & F(a \boxtimes b)
\end{tikzcd}$$

命題 2.7.4 (2 種類の強モナド)**.** モノイド閉圏において定義2.7.2と定義2.7.3は一致する。つまり、

1. 閉圏の意味での強モナド（定義2.7.2）に適切な構造（テンソル強度 t）を与えてモノイド圏の意味での強モナド（定義2.7.3）を構成できる。
2. モノイド圏の意味での強モナド（定義2.7.3）に適切な構造（強度 st）を与えて閉圏の意味での強モナド（定義2.7.2）を構成できる。

3. 1. と 2. は互いに逆変換である。

ただし、「適切な構造」は命題2.2.6で定める強度またはテンソル強度のことである。

Proof. TODO: 示したい □

2.8 「モナドはアプリカティブ関手である」の正確な意味

Haskell をやっている者ならば、モナド（Monad クラスのインスタンスとなるようなデータ構築子）がアプリカティブ関手（Applicative クラスのインスタンス）であることはよく知っているだろう。この事実を、モノイド圏や閉圏の言葉を使って述べておきたい。

まず注意しなければならないのは、lax モノイド関手または閉関手（アプリカティブ関手）は圏のモノイド構造なり内部ホムに依存して定まる概念なのに対して、モナド（2.7.1）は圏のモノイド構造や内部ホムに依存せずに定義できるという点である。つまり、一般にはモナドは lax モノイド関手でも閉関手ではないが、モナドに対してモノイド構造（または内部ホム）に依存する性質を追加で要請して初めて lax モノイド関手（または閉関手）となる、と考えるべきである。追加で要請する「モノイド構造（または内部ホム）に依存する性質」とは、テンソル強度（または強度）のことである。つまり、強モナドは強 lax モノイド関手（または強閉関手）となる。

「強モナドは強 lax モノイド関手になる」という主張にも注意が必要で、強モナドを強 lax モノイド関手とみなすやり方は 2 通りある。というのは、Haskell でモナド m に対し $(m\ a, m\ b) \to m\ (a, b)$ なる関数を定義しろと言われたら、

```
-- 左を先に処理する
f :: (Monad m) => (m a, m b) -> m (a, b)
f (u, v) = do x <- u
              y <- v
              return (x, y)
```

と

```
-- 右を先に処理する
g :: (Monad m) => (m a, m b) -> m (a, b)
g (u, v) = do y <- v
              x <- u
              return (x, y)
```

の 2 通りが考えられるだろう。これらは引数 u と v の「処理の順番」が異なるので、一般には異なる関数である。ただ、Haskell における Reader モナドのような、「処理の順番」に依存しないモナドであれば、これら 2 つは関数として一致する。そのようなモナドは可換モナドと呼ばれる。モナドの可換性は、一般のモナドではなく強モナドに対して定義される概念である。Haskell でよく使われるモナドとしては、Reader モナドと Maybe モナドが可換モナドの例である（例によってボトムは考慮に入れない）。

実際の Haskell で `Monad` インスタンスを `Applicative` インスタンスとみなす方法が 2 通りあると困るの

で、Applicative の公理では、「アプリカティブ関手 F が `Monad` のインスタンスであるならば、`<*> = ap` を満たす」ことを要請している。つまり、「左を先に処理する」方法で `Monad` を `Applicative` と見なせ、としている。

命題 2.8.1 (強モナドを「左が先」で強 lax モノイド関手とみなす)**.** 対称モノイド圏 $(\mathcal{C}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \varrho, B)$ において、強モナド (F, μ, η, t) に次の方法で強 lax モノイド関手の構造 $(F, \varepsilon, m, \eta)$ を定めることができる：

- $\varepsilon \coloneqq \eta_e \colon e \to F(e)$
- $m \coloneqq \mu \circ F(t) \circ F(B) \circ t \circ B \colon F(a) \boxtimes F(b) \to F(a \boxtimes b)$ つまり m は

$$F(a) \boxtimes F(b) \xrightarrow{B} F(b) \boxtimes F(a) \xrightarrow{t} F(F(b) \boxtimes a) \xrightarrow{F(B)} F(a \boxtimes F(b)) \xrightarrow{F(t)} F(F(a \boxtimes b)) \xrightarrow{\mu} F(a \boxtimes b)$$

  の合成である。

Proof. TODO: 公理をチェックする。 □

命題 2.8.2 (強モナドを「右が先」で強 lax モノイド関手とみなす)**.** 対称モノイド圏 $(\mathcal{C}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \varrho, B)$ において、強モナド (F, μ, η, t) に次の方法で強 lax モノイド関手の構造 $(F, \varepsilon, m', \eta)$ を定めることができる：

- $\varepsilon \coloneqq \eta_e \colon e \to F(e)$
- $m' \coloneqq \mu \circ F^2(B) \circ F(t) \circ F(B) \circ t \colon F(a) \boxtimes F(b) \to F(a \boxtimes b)$ つまり m' は

$$F(a) \boxtimes F(b) \xrightarrow{t} F(F(a) \boxtimes b) \xrightarrow{F(B)} F(b \boxtimes F(a)) \xrightarrow{F(t)} F^2(b \boxtimes a) \xrightarrow{F^2(B)} F^2(a \boxtimes b)) \xrightarrow{\mu} F(a \boxtimes b)$$

  の合成である。

Proof. TODO: 公理をチェックする。 □

命題 2.8.3 (強モナドを「左が先」で強閉関手とみなす)**.** 対称閉圏 $\mathcal{C}$ において、強モナドに次の方法で強閉関手の構造 $(F, \varepsilon, \mathsf{ap}, \eta)$ を定めることができる：

- $\varepsilon \coloneqq \eta_e \colon e \to F(e)$
- $\mathsf{ap} \coloneqq \ldots$

命題 2.8.4 (強モナドを「右が先」で強閉関手とみなす)**.** 対称閉圏 $\mathcal{C}$ において、強モナドに次の方法で強閉関手の構造 $(F, \varepsilon, \mathsf{ap}', \eta)$ を定めることができる：

- $\varepsilon \coloneqq \eta_e \colon e \to F(e)$
- $\mathsf{ap}' \coloneqq \ldots$

TODO: 対称モノイド閉圏で強モナドを強 lax モノイド関手とみなした時に強閉関手の解釈の仕方が一意的

定義 2.8.5 (対称モノイド圏の可換モナド)**.** 対称モノイド圏において、強モナドを命題2.8.1の方法で強 lax モノイド関手とみなしたものと、命題2.8.2の方法で強 lax モノイド関手とみなしたものが一致する時、その強モナドを可換モナド (commutative monad) という。

定義 2.8.6 (対称閉圏の可換モナド)**.** 対称閉圏において、強モナドを命題2.8.3の方法で強閉関手とみなしたものと、命題2.8.4の方法で強 lax モノイド関手とみなしたものが一致する時、その強モナドを可換モナド

(commutative monad) という。

命題 2.8.7 (対称モノイド閉圏の可換モナド)**.** 対称モノイド閉圏において、可換モナドの 2 つの定義は一致する。

付録 A

対角自然変換（未執筆）

（自然変換に関する「$\mathrm{Hom}(a, Fb) \cong \mathrm{Hom}(a, Gb)$ なら $Fb \cong Gb$」みたいな主張が対角自然変換に関しても言えることを書きたかった）

付録 B

豊穣圏

せっかくモノイド圏を定義したので、豊穣圏（ほうじょうけん） (enriched category) も定義しておこう。

豊穣圏とは、ホム集合（セット）$\mathrm{Hom}(-,-)$ に「単なる集まり」以上の構造が入った圏である。いくつか例を挙げる：

- 前加法圏 (preadditive category) とは、各ホム集合にアーベル群の構造が入っており、射の合成が双線型となるような圏のことである。例えば、実線型空間と実線型写像からなる圏においては、各ホムセットにアーベル群の構造が入っている。
- ゼロ射を持つ圏とは、各ホム集合にそれぞれゼロ射と呼ばれる射が定まっており、ゼロ射と他の射の合成は再びゼロ射となるような圏のことである。前加法圏はゼロ射を持つ。前加法圏でないがゼロ射を持つ圏の例としては、群のなす圏 $\mathbf{Grp}$ や、リー代数のなす圏などがある。
- 局所小圏 (locally small category) とは、各ホム集合が小さい集合であるような圏のことである。例えば、集合と写像からなる圏 $\mathbf{Set}$ は局所小圏である。
- 前順序集合 (preordered set) とは、各ホム集合の元がたかだか 1 つしかないような小圏のことである。

豊穣圏の言葉を使うと、それぞれ、$\mathbf{Ab}$, $\mathbf{Set}_*$, $\mathbf{Set}$, $\mathbf{2} = \{0 \to 1\}$ で豊穣化 (enrich) された圏、と言い表せる。

$(\mathcal{V}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \varrho)$ をモノイド圏とする。$\mathcal{V}$-豊穣圏 ($\mathcal{V}$-enriched category) あるいは単に $\mathcal{V}$-圏 ($\mathcal{V}$-category) $\mathcal{A}$ は、以下からなり：

- 対象の集まり $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$
- 各対象 $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対するホム対象 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,b) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$
- $\mathcal{V}$ における自然変換 $M_{a,b,c}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(b,c) \boxtimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,b) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,c)$「$\mathcal{A}$ の射の合成」
- $\mathcal{V}$ における射 $j_a\colon e \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,a)$「$\mathcal{A}$ の恒等射」

以下の図式を可換にする：

1. 結合法則（通常の圏の公理の $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ に相当）

$$
\begin{tikzcd}
(\mathrm{Hom}(c,d) \boxtimes \mathrm{Hom}(b,c)) \boxtimes \mathrm{Hom}(a,b) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "M \boxtimes \mathrm{id}"'] & & \mathrm{Hom}(c,d) \boxtimes (\mathrm{Hom}(b,c) \boxtimes \mathrm{Hom}(a,b)) \arrow[d, "\mathrm{id} \boxtimes M"] \\
\mathrm{Hom}(b,d) \boxtimes \mathrm{Hom}(a,b) \arrow[dr, "M"'] & & \mathrm{Hom}(c,d) \boxtimes \mathrm{Hom}(a,c) \arrow[dl, "M"] \\
& \mathrm{Hom}(a,d) &
\end{tikzcd}
$$

2. 恒等射（通常の圏の公理の $\mathrm{id} \circ f = f = f \circ \mathrm{id}$ に相当）

$$
\begin{tikzcd}
e \boxtimes \mathrm{Hom}(a,b) \arrow[d, "j \boxtimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\lambda"] & & \mathrm{Hom}(a,b) \boxtimes e \arrow[dl, "\varrho"'] \arrow[d, "\mathrm{id} \boxtimes j"] \\
\mathrm{Hom}(b,b) \boxtimes \mathrm{Hom}(a,b) \arrow[r, "M"'] & \mathrm{Hom}(a,b) & \mathrm{Hom}(a,b) \boxtimes \mathrm{Hom}(a,a) \arrow[l, "M"]
\end{tikzcd}
$$

圏というのは関手と自然変換を語るのための言葉なので、豊穣圏を定義したからにはその間の関手も定義しなくてはならない。$\mathcal{V}$-豊穣圏 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の間の $\mathcal{V}$-豊穣関手 ($\mathcal{V}$-enriched functor) $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ とは、以下の組

- 対象の間の写像 $T\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$
- ホム対象の間の（$\mathcal{V}$ の）射 $T_{a,b}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,b) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Ta,Tb)$

であって、以下の図式を可換にするものである：

1. 合成を保つ（通常の関手の公理における $F(g \circ f) = Fg \circ Gf$）

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(b,c) \boxtimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,b) \arrow[r, "M"] \arrow[d, "T \boxtimes T"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,c) \arrow[d, "T"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Tb,Tc) \boxtimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Ta,Tb) \arrow[r, "M"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Ta,Tc)
\end{tikzcd}
$$

2. 単位元を保つ（通常の関手の公理における $F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$）：

$$
\begin{tikzcd}
& e \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "j"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,a) \arrow[rr, "T"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Ta,Ta)
\end{tikzcd}
$$

TODO: 豊穣自然変換

TODO: 閉圏との関係

付録 C

モノイド対象

モノイド圏においては、通常のモノイドの一般化であるモノイド対象 (monoid object) が定義できる。

通常のモノイド $(M, e, \cdot)$ は

- 集合 M
- 単位元 $e \in M$
- 二項演算 $\cdot\colon M \times M \to M$

からなるが、これを集合の代わりにモノイド圏の言葉で定式化する。モノイドの単位元は「集合の元」だったが、モノイド圏 $\mathcal{V}$ の言葉を使うならば「単位対象からの射」と考える。

- 対象 $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$
- 単位対象からの射 $\eta\colon e \to M$「単位元」
- 射 $\mu\colon M \boxtimes M \to M$「二項演算」

$$
\begin{tikzcd}
(M \boxtimes M) \boxtimes M \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "\mu \boxtimes \mathrm{id}_M"'] & & M \boxtimes (M \boxtimes M) \arrow[d, "\mathrm{id}_M \boxtimes \mu"] \\
M \boxtimes M \arrow[dr, "\mu"'] & & M \boxtimes M \arrow[dl, "\mu"] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
e \boxtimes M \arrow[r, "\eta \boxtimes \mathrm{id}_M"] \arrow[dr, "\lambda"'] & M \boxtimes M \arrow[d, "\mu"] & M \boxtimes e \arrow[l, "\mathrm{id}_M \boxtimes \eta"'] \arrow[dl, "\varrho"] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

例 C.0.1. 集合圏のモノイド対象は通常のモノイドである。

例 C.0.2. 自己関手の圏のモノイド対象はモナド (monad) と呼ばれる。

関連して、群対象 (group object) という概念がある。モノイド対象は一般のモノイド圏で定義できたのに対して、群対象はデカルトモノイド圏（デカルト積をモノイド演算とみなした圏）で定義される。これは、一

般のモノイド圏には対角射 $a \to a \boxtimes a$ が存在せず、逆元に関する公理 $a^{-1}a = e$ に相当する図式を描けないからだと考えられる（たぶん）。

さて、モノイド対象の公理は豊穣圏の公理と形が似ていることにお気づきだろうか。実は、モノイド圏 $\mathcal{V}$ におけるモノイド対象 M は、対象が 1 個の $\mathcal{V}$-豊穣圏と同一視できる。

付録 D

テンソル強度おまけ

対称モノイド圏 $(\mathcal{C}, \boxtimes, e, \alpha, \lambda, \varrho, B)$ においては、自然変換

$$t^T_{a,b} \colon F(a) \boxtimes b \to F(a \boxtimes b)$$

を $t^T_{a,b} := F(B_{b,a}) \circ t_{b,a} \circ B_{F(a),b}$ によって定義できる。この t^T は、テンソル強度 t の左右を入れ替えたものとして機能する（命題D.0.1）。

命題 D.0.1. $t^T := F(B) \circ t \circ B$ について次が成り立つ：

1. 任意の対象 $a, b, c \in \mathcal{C}$ に対し、次の五角形図式が可換：

$$\begin{tikzcd}
 & (F(a) \boxtimes b) \boxtimes c \arrow[dl, "t^T_{a,b} \boxtimes \mathrm{id}_c"'] \arrow[dr, "\alpha_{F(a),b,c}"] & \\
F(a \boxtimes b) \boxtimes c \arrow[d, "t^T_{a \boxtimes b, c}"'] & & F(a) \boxtimes (b \boxtimes c) \arrow[d, "t^T_{a, b \boxtimes c}"] \\
F((a \boxtimes b) \boxtimes c) \arrow[rr, "F(\alpha_{a,b,c})"] & & F(a \boxtimes (b \boxtimes c))
\end{tikzcd}$$

2. 任意の対象 $a \in \mathcal{C}$ に対し、$F(\varrho_a) \circ t^T_{a,e} = \varrho_{F(a)}$. あるいは、次の三角形図式が可換：

$$\begin{tikzcd}
F(a) \boxtimes e \arrow[rr, "t^T_{a,e}"] \arrow[dr, "\varrho_{F(a)}"'] & & F(a \boxtimes e) \arrow[dl, "F(\varrho_a)"] \\
 & F(a) &
\end{tikzcd}$$

Proof. 次の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & (F(a)\boxtimes b)\boxtimes c \arrow[dllll, "t^T_{a,b}\boxtimes \mathrm{id}_c"'] \arrow[drrrr, "\alpha_{F(a),b,c}"] & & & & \\
F(a\boxtimes b)\boxtimes c \arrow[ddddd, "t^T_{a\boxtimes b,c}"'] & & \text{イ} & & (b\boxtimes F(a))\boxtimes c \arrow[u, "B\boxtimes \mathrm{id}"'] \arrow[dlll, "t\boxtimes \mathrm{id}"'] & & \text{ハ} & & F(a)\boxtimes (b\boxtimes c) \arrow[ddddd, "t^T_{a,b\boxtimes c}"] \\
 & F(b\boxtimes a)\boxtimes c \arrow[ul, "F(B)\boxtimes \mathrm{id}"'] \arrow[dddr, "t^T"] & & \text{ロ} & c\boxtimes (b\boxtimes F(a)) \arrow[u, "B"] \arrow[dl, "\mathrm{id}\boxtimes t"'] & & & F(a)\boxtimes (c\boxtimes b) \arrow[ur, "\mathrm{id}\boxtimes B"] \arrow[dddl, "t^T"'] & \\
 & & & c\boxtimes F(b\boxtimes a) \arrow[ull, "B"] \arrow[d, "t"] & \text{ヘ} & (c\boxtimes b)\boxtimes F(a) \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[urr, "B"'] \arrow[d, "t"'] & & & \\
 & \text{ニ} & \text{ホ} & F(c\boxtimes (b\boxtimes a)) \arrow[dl, "F(B)"] & & F((c\boxtimes b)\boxtimes a) \arrow[ll, "F(\alpha)"] \arrow[dr, "F(B)"'] & \text{ト} & \text{チ} & \\
 & & F((b\boxtimes a)\boxtimes c) \arrow[dll, "F(B\boxtimes \mathrm{id})"] & & \text{リ} & & F(a\boxtimes (c\boxtimes b)) \arrow[drr, "F(\mathrm{id}\boxtimes B)"'] & & \\
F((a\boxtimes b)\boxtimes c) \arrow[rrrrrrrr, "F(\alpha_{a,b,c})"] & & & & & & & & F(a\boxtimes (b\boxtimes c))
\end{tikzcd}
$$

四角形イ、ホ、トは、t^T の定義より可換である。五角形へは、テンソル強度 t の公理より可換である。四角形ロ、ニ、チは、それぞれ B, t^T, t^T の自然性より可換である。六角形ハ、リは、一貫性（コヒーレンス）より可換である……といいなあ（TODO）。

図式の放射方向の射が同型であることを考えれば、図式の一番外側の五角形も可換であることがわかる。これで主張の前半が示された。

次の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
F(a)\boxtimes e \arrow[rr, "t^T_{a,e}"] \arrow[dr, "\varrho_{F(a)}"'] \arrow[dd, "B_{F(a),e}"'] & \text{イ} & F(a\boxtimes e) \arrow[dl, "F(\varrho_a)"] \arrow[dd, "F(B_{a,e})"] \\
\text{ロ} & F(a) \arrow[dr, "F(\lambda_a^{-1})"] & \text{ハ} \\
e\boxtimes F(a) \arrow[ur, "\lambda_{F(a)}"] \arrow[rr, "t_{e,a}"'] & \text{ニ} & F(e\boxtimes a)
\end{tikzcd}
$$

一番外側の四角形は、t^T の定義より可換である。三角形ロ、ハは命題1.4.2より可換である。三角形ニは、テンソル強度 t の公理より可換である。あとは、$F(\lambda)$ が可逆であることを考えれば、三角形イが可換であることがわかる。 $\square$

参考文献

[1] Mac Lane, S. (1978). Categories for the Working Mathematician (Vol. 5). New York, NY: Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4721-8

[2] Kelly, G. M. (1982). Basic concepts of enriched category theory. Cambridge University Press.

[3] Eilenberg, S., & Kelly, G. M. (1966). Closed Categories. In Proceedings of the Conference on Categorical Algebra (pp. 421–562). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-99902-4_22

[4] Manzyuk, O. (2012). Closed categories vs. closed multicategories. Theory and Applications of Categories, 26, 132–175. https://arxiv.org/abs/0904.3137

[5] Kelly, G. M., & MacLane, S. (1971). Coherence in closed categories. Journal of Pure and Applied Algebra, 1(1), 97–140. https://doi.org/10.1016/0022-4049(71)90013-2

[6] Kock, A. (1972). Strong functors and monoidal monads. Archiv Der Mathematik, 23(1), 113–120. https://doi.org/10.1007/BF01304852

[7] Kelly, G. M. (1964). On MacLane’s conditions for coherence of natural associativities, commutativities, etc. Journal of Algebra, 1(4), 397–402. https://doi.org/10.1016/0021-8693(64)90018-3

[8] McBride, C., & Paterson, R. (2008). FUNCTIONAL PEARL Applicative programming with effects. Online, 18, 1-13. https://doi.org/10.1017/S0956796807006326 http://www.staff.city.ac.uk/~ross/papers/Applicative.html

[9] Schipper, W. J. de (1975). Symmetric closed categories. Mathematical Centre Tracts, 64, Mathematisch Centrum.

その他、モノイド圏周りについて参考になる Web サイト：

- nLab https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage
- 壱大整域 / 圏論 http://alg-d.com/math/kan_extension/ 特に enrich.pdf
- 檜山正幸のキマイラ飼育記 http://d.hatena.ne.jp/m-hiyama/